四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

數學鑰卷一

詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官進士臣朱鈐

校對官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣劉翰周

數學鑰　　天文算法類二算書之屬

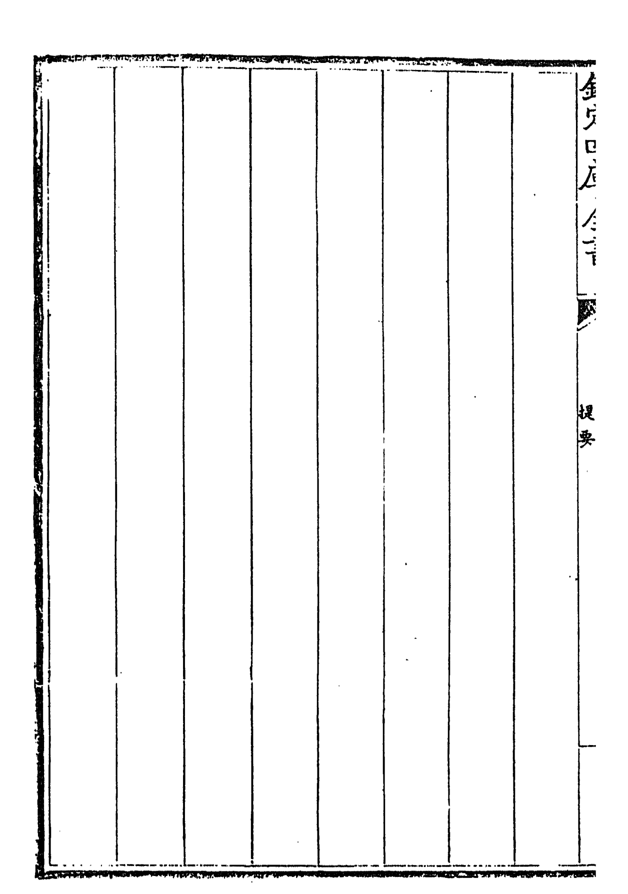
提要

臣等謹案數學鑰六卷

國朝杜知耕撰其書列古方田粟布衰分少廣商功均輸盈朒方程勾股九章取今線面體三部之法隸之載其圖解並摘其要語以為之注與方中通所撰數度衍用今法以合九

章者體例相同而每章設例必標其凡於章首每問答有所旁通者必附其術於條下所引証之文必著其所出蒐輯尤詳梅文鼎勿菴歴算書記曰近代作者如李長茂算海詳説亦有發明然不能具九章惟方位伯數度衍於九章之外蒐羅甚富杜端伯數學鑰圖注九章頗中肯綮可為算家程式其説固不誣矣世有二本其一為妄人竄亂殊失本真

此本猶當日初刋今據以校正以復知耕之
舊焉乾隆四十六年四月恭校上
總纂官臣紀昀臣陸錫熊臣孫士毅
總校官臣陸費墀



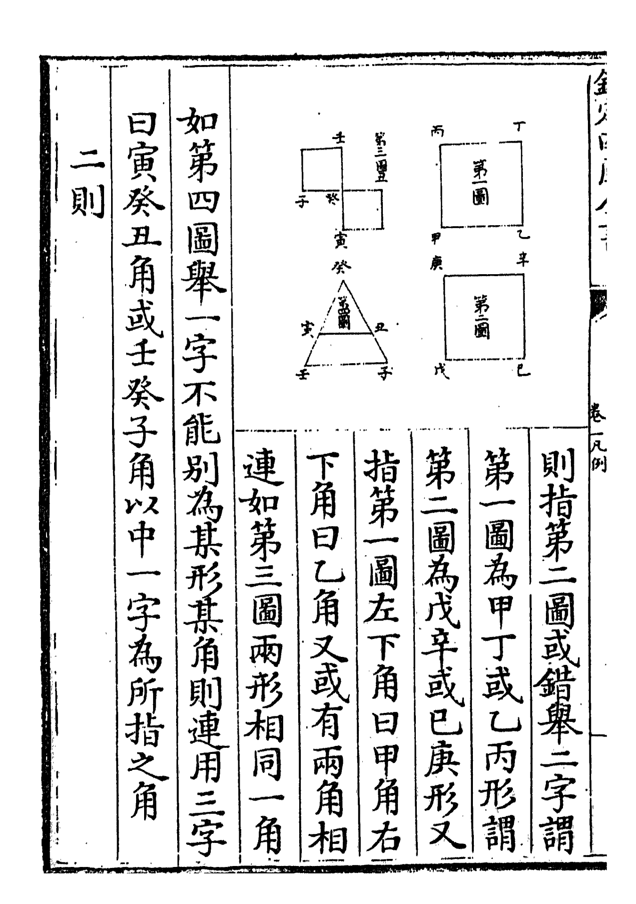
數學鑰卷一凡例

柘城杜知耕撰

凡例 計十四則

一則

數非圖不明圖非手指不明圖用甲乙等字作誌者代指也作誌必用甲乙等字者取其筆畫省而不亂正文也甲乙等字盡則用子丑等字又盡則用乾坤等字如云甲乙丙丁方形則指第一圖戊巳庚辛方形



則指第二圖或錯舉二字謂第一圖為甲丁或乙丙形謂第二圖為戊辛或巳庚形又指第一圖左下角曰甲角右下角曰乙角又或有兩角相連如第三圖兩形相同一角如第四圖舉一字不能別為某形某角則連用三字曰寅癸丑角或壬癸子角以中一字為所指之角

二則

四邊皆等四角中矩者曰方形如第一圖四角中矩四邊兩兩相等者曰直形如第二圖或四邊等或兩邊等而四角俱不中矩者曰象目形如第三圖四邊俱不等兩角中矩兩角不中矩者曰斜方形如第四圖角不中矩兩邊相等者曰梯形如第五圖邊及角俱不等

第一圖
第二圖
第三圖
第四圖
第五圖
第六圖
第七圖
甲
第八圖

者曰無法形如第六圖三邊形有一方角者（甲為方角）曰勾股形如第七圖無方角者曰三角形如第八圖

三則

形邊之界曰線線之縱者曰長或曰高衡者曰濶或曰廣在下者或曰底斜對兩角者曰弦

四則

形之積步積尺曰積曰容方形之容或曰冪

五則

線之作誌處曰點

六則

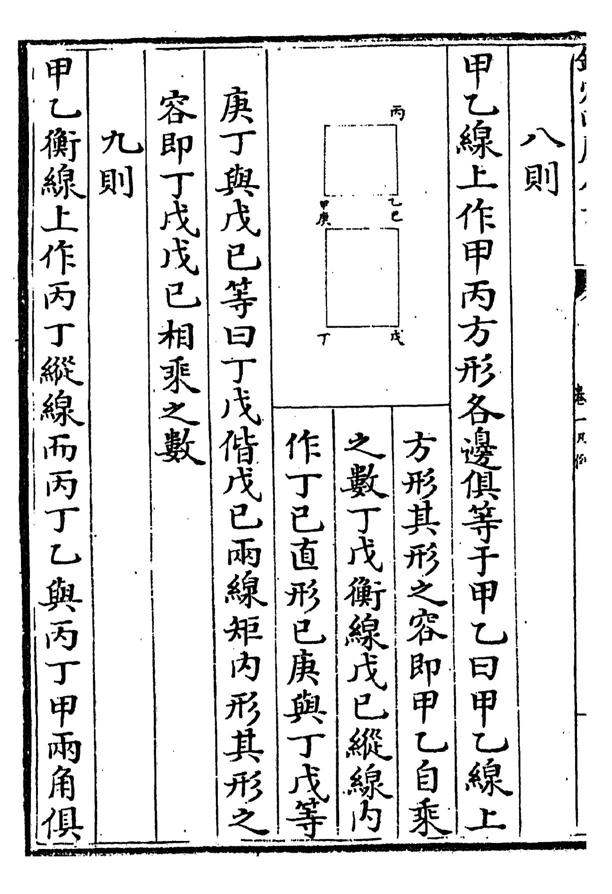
兩線相並曰和

七則

以此線比彼線彼線之大于此線者以此形比彼形彼形之大于此形者或曰較或曰差如甲丙線之大于甲乙線為丙乙則丙乙為兩線之較線或曰兩線之差丁巳形之大于丁戊形為庚巳形則庚巳為兩形之較形或曰兩形之差

八則

甲乙線上作甲丙方形各邊俱等于甲乙曰甲乙線上方形其形之容即甲乙自乘之數丁戊衡線戊巳縱線內作丁巳直形巳庚與丁戊等庚丁與戊巳等曰丁戊偕戊巳兩線矩內形其形之容即丁戊戊巳相乘之數



九則

甲乙衡線上作丙丁縱線而丙丁乙與丙丁甲兩角俱

方角則丙丁為甲乙線上之垂線

丙
甲　丁　乙

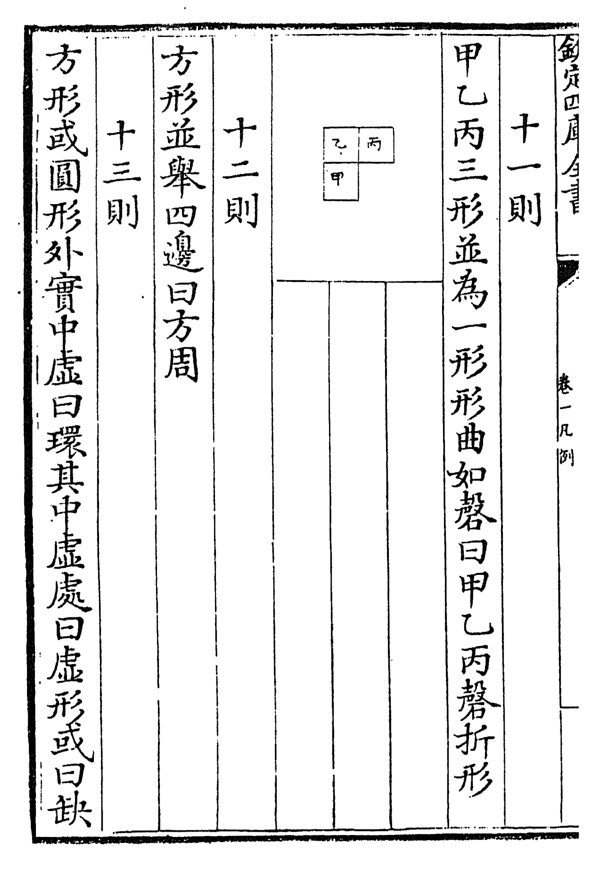
十則

兩直線引至無窮不相離亦不相遇曰平行線平行線內任作幾形皆等高如甲乙丙丁兩線平行兩線內作戊巳庚三角形與辛壬直形兩形之高必相等凡兩形等高者則曰同在平行線內

丙　庚　壬　丁
甲　戊　巳　辛　乙

十一則

甲乙丙三形並為一形形曲如磬曰甲乙丙磬折形



十二則

方形並舉四邊曰方周

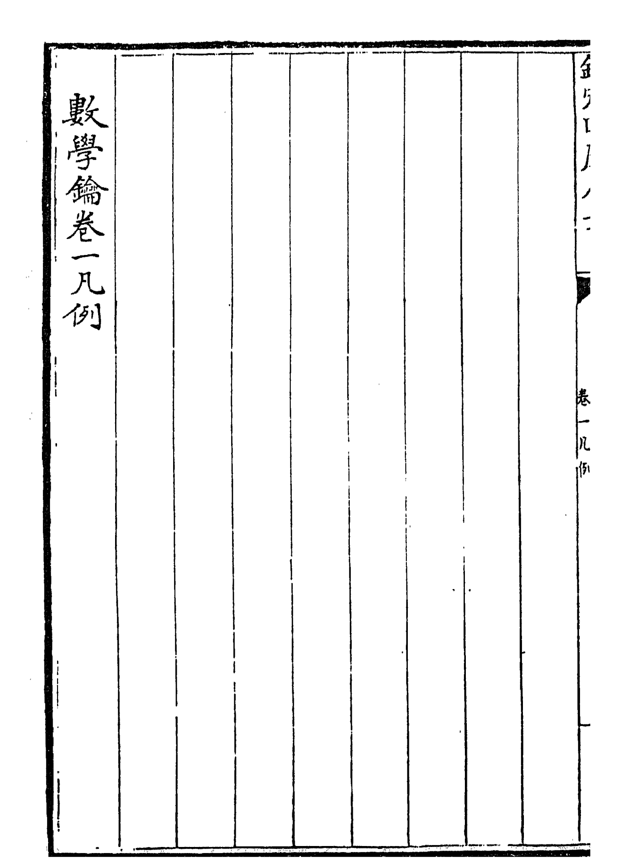
十三則

方形或圓形外實中虛曰環其中虛處曰虛形或曰缺

形

十四則

甲乙形以丙丁線分之成甲丁丙乙兩形或再以戊巳線分之成甲庚丙巳戊丁庚乙四形謂甲丁等二形或甲庚等四形曰分形謂甲乙元形曰全形



數學鑰卷一凡例

欽定四庫全書

數學鑰卷一目録

柘城杜知耕撰

方田上直線類

四十八則斜方形以截積截濶求截長

四十九則斜方形以截濶求截長

五十則斜方形以截長求截濶

五十一則斜方形依小邊截積求截濶

五十二則斜方形依大邊截積求截濶

五十三則梯形截勾股

五十四則梯形截斜方

五十五則梯形截無法五邊形

增

五十六則方環截外周

增 五十七則方環截內周

數學鑰卷一目録

數學鑰卷一

柘城杜知耕撰

方田上 直線類

一則

實積求畝

設田積二萬九千五百二十步求畝法曰置積為實以畝法二四除之得一百二十三畝即所求

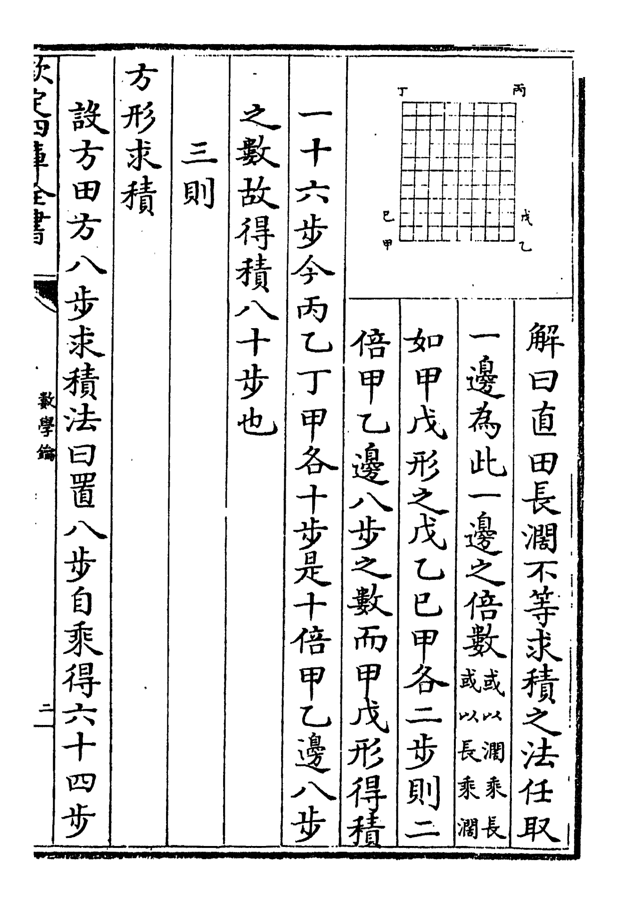
解曰五尺為步二百四十步為畝如自甲至乙濶一

步（即五尺）餘三邊各與甲乙等則甲丙方形為積一步二百四十倍之則為一畝故畝法用二四也本卷及二卷皆言求積之法得積以此法求之即得畝數

二則

直形求積

設直田長十步濶八步求積法曰置長為實以濶乘之得八十步即所求



解曰直田長濶不等求積之法任取一邊為此一邊之倍數或以濶乘長或以長乘濶如甲戊形之戊乙巳甲各二步則二倍甲乙邊八步之數而甲戊形得積一十六步今丙乙丁甲各十步是十倍甲乙邊八步之數故得積八十步也

三則

方形求積

設方田方八步求積法曰置八步自乘得六十四步

即所求

解曰方田四邊皆等以此邊為此邊之倍數與以他邊為此邊之倍數同故法用自乘也

四則

勾股求積

設勾股田股長十二步勾濶八步求積法曰置股為實以勾乘之得九十六步折半得四十八步即所求

解曰勾股形當等高等濶直形之半如甲乙丙勾股

丙
甲　乙
庚　壬　巳
丁　癸　戊

形另作丁巳直形與之等高（謂丁庚與甲丙等）等濶（謂丁戊與甲乙等）以庚戊線分之則成丁戊庚庚巳戊兩勾股形皆與甲乙丙勾股形等夫丁巳一直形當甲乙丙勾股形二而甲乙丙勾股形不當丁巳直形之半乎法以勾乘股所得者丁巳直形積也故半之得勾股積又法置股為實以半勾四步乘之所得同前（半股為實以勾乘之亦得）

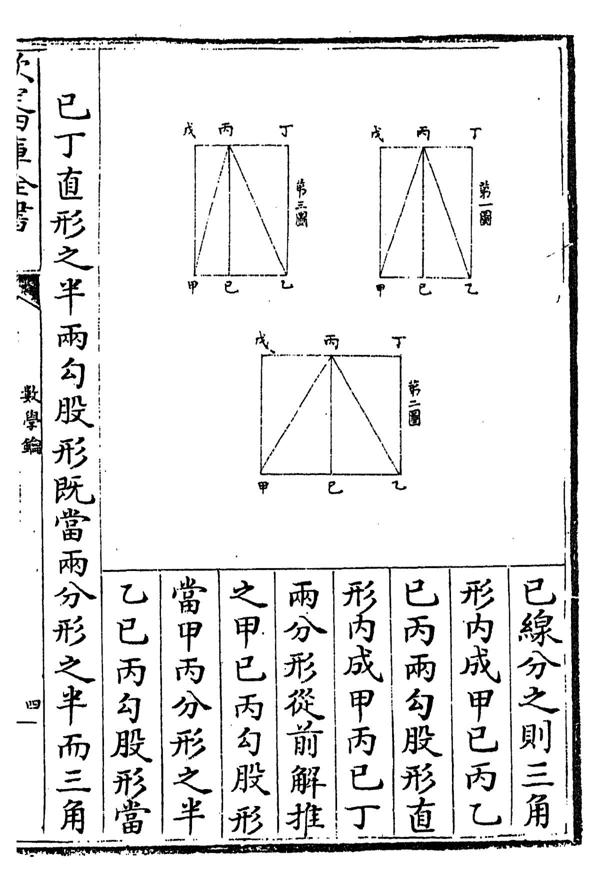
解曰丁已直形再以壬辛線中分之成丁壬辛巳兩分形法以半勾乘股所得即分形積也勾股既為丁已直形之半而分形亦為丁已直形之半故分形積即勾股積也

五則

三角形求積

設三角田中長一十二步底濶八步求積法同勾股田

解曰甲乙丙三角形依底線作甲丁直形從角以丙

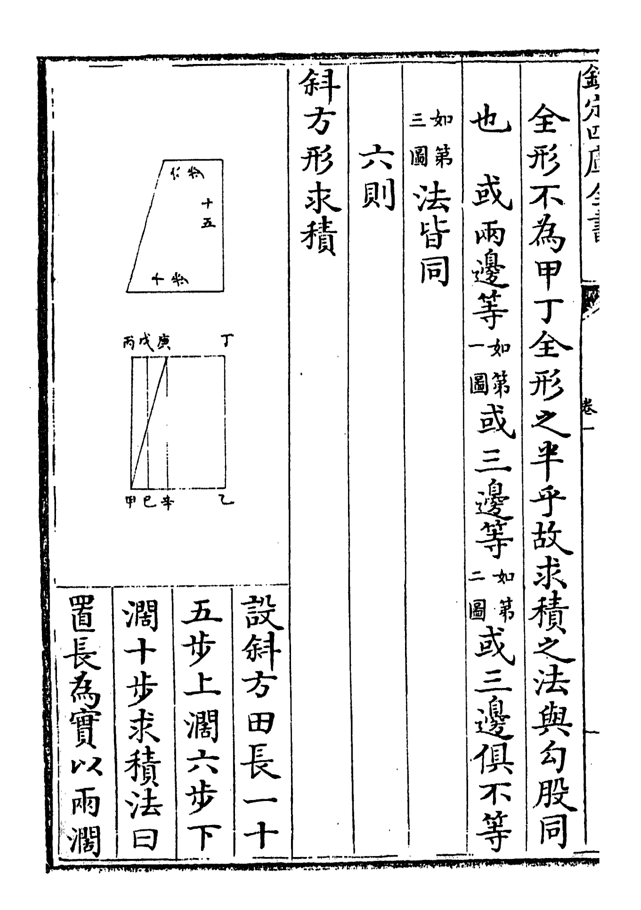


巳線分之則三角形内成甲巳丙乙巳丙兩勾股形直形内成甲丙巳丁兩分形從前解推之甲巳丙勾股形當甲丙分形之半乙巳丙勾股形當巳丁直形之半兩勾股形既當兩分形之半而三角

全形不為甲丁全形之半乎故求積之法與勾股同也　或兩邊等如第一圖或三邊等如第二圖或三邊俱不等如第三圖法皆同

六則

斜方形求積



設斜方田長一十五步上濶六步下濶十步求積法曰置長為實以兩濶

相並共一十六步折半得八步為法乘之得一百二十步即所求

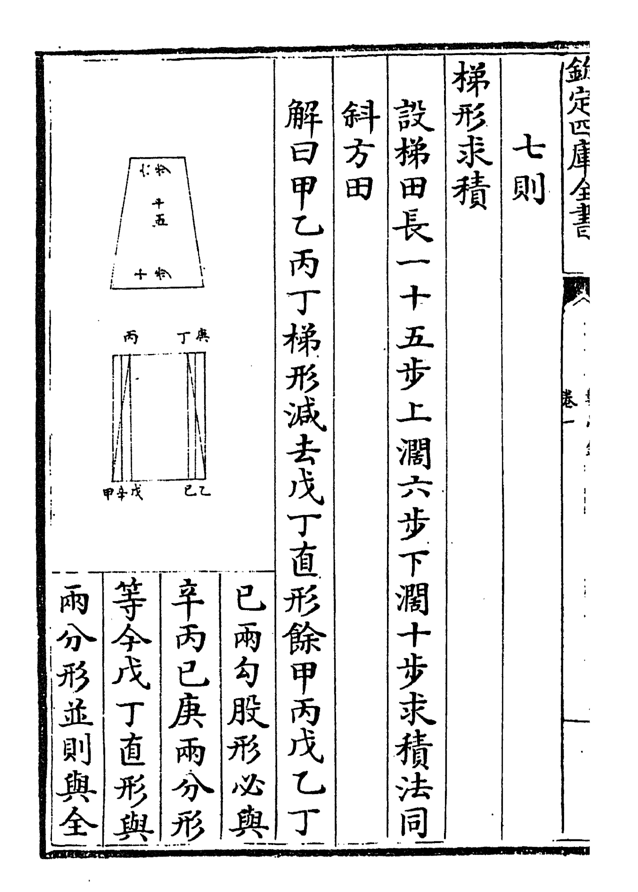
解曰甲乙丁庚斜方形減去辛丁直形所餘必甲庚辛勾股形勾股形既為等高等濶直形之半本卷四則則已庚直形必與甲庚辛勾股形等又已庚直形與辛丁直形並亦必與甲庚辛勾股形與辛丁直形並等法並兩濶折半者乙已之度也以乙已乘丁乙所得乃已丁直形也而已丁直形即已庚辛丁兩形並也安得不與甲乙丁庚斜方形等乎

七則

梯形求積

設梯田長一十五步上濶六步下濶十步求積法同斜方田

解曰甲乙丙丁梯形減去戊丁直形餘甲丙戊乙丁



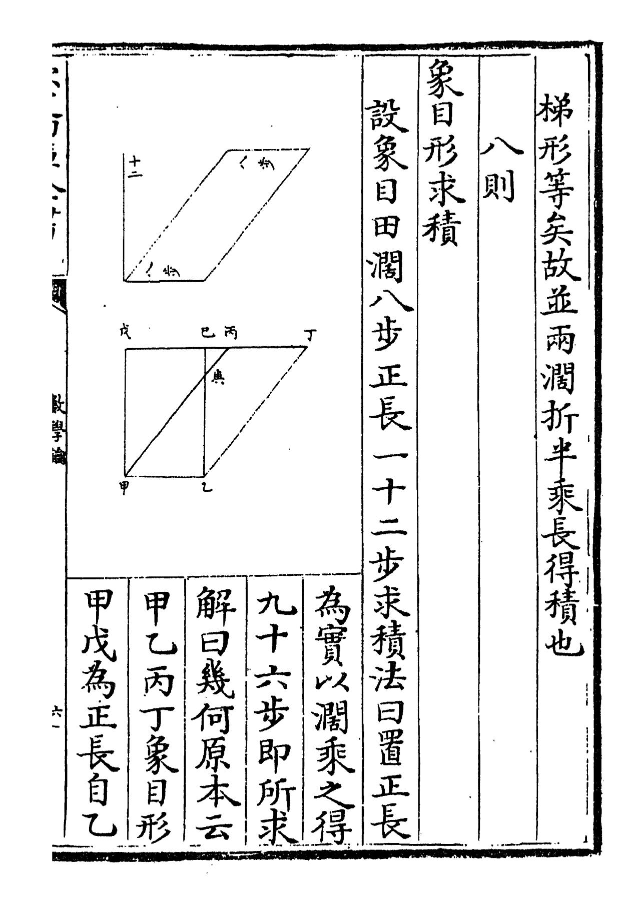
已兩勾股形必與辛丙已庚兩分形等今戊丁直形與兩分形並則與全

梯形等矣故並兩濶折半乘長得積也

八則

象目形求積

設象目田濶八步正長一十二步求積法曰置正長



為實以濶乘之得九十六步即所求

解曰幾何原本云甲乙丙丁象目形甲戊為正長自乙

作乙巳線與甲戊平行次于丁丙線引長之至戊成甲乙巳戊甲乙丁丙兩形在平行線内（等高即在平行線内）而同底（等濶即同底）則兩形必相等何也甲戊乙巳兩線既平行則戊巳必與甲乙等而丙丁元等于甲乙則丙丁與戊巳必亦等丙丁既與甲乙等則甲丙乙丁兩線必平行而亦相等因顯甲丙戊乙丁巳兩三角形亦等于兩形内每減一巳丙庚三角形所餘甲庚巳戊庚乙丙丁兩無法四邊形亦等次于兩無法形每加一甲庚乙三角形則成甲乙丙丁甲乙戊巳兩形

安得不等法以濶乘正長得甲己直形之積即甲乙丙丁象目形之積

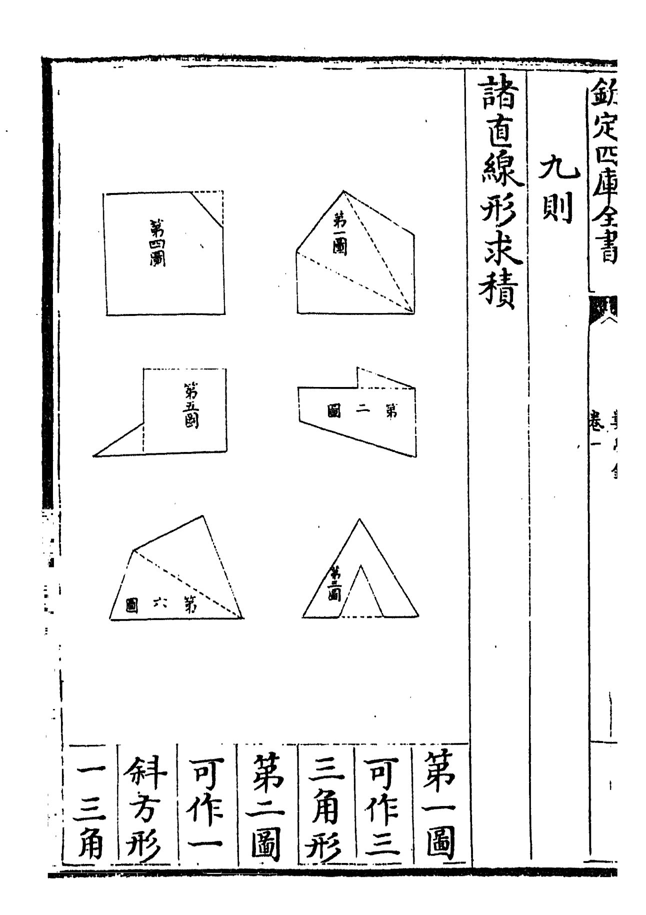
又法甲乙丙丁象目田自甲量至丁得一十六步自丙量至戊得六步兩數相乘亦得九十六步與前同

解曰象目田以甲丁線分之則成相等之兩三角形甲丁即底丙戊即中長也故以底乘長得全積也三角法以底乘長折半得積今不折故得兩形之共積

丙 丁 戊 甲 乙

九則

諸直線形求積



第一圖可作三三角形第二圖可作一斜方形一三角

形第三圖可作一三角形而減一小三角形第四圖可作一方形而減一勾股形第五圖可作一直形一勾股形第六圖可作兩三角形其餘千形萬狀凡屬直線邊者皆依方直三角勾股裁之

十則

積求方邊即開平方

設方田積三萬六千一百步求方邊法曰置積于中為實初商一百步于實左亦置一百步于實右為方法左右對呼除實一萬步餘二萬六千一百步倍方法得二百步為

廉法次商九十步于左初商之次（共一百九十步）亦置九十步于右廉法之次為隅法（共二百九十步）以左次商與廉法對呼除實一萬八千步（餘八千一百步）又以左次商與隅法對呼除實八千一百步恰盡于左得一百九十步即所求方邊之數

解曰初商與方法對呼所除者巳辛方形也（即大方積）次商與廉法對呼所除者甲壬壬丁兩直形也（即兩廉）必

倍方法為廉法者以廉有二也次商與隅法對呼所除者庚戊方形也即隅方四形恰盡實積則初次兩商之數為方田邊無疑矣

小隅積六十四
隅積三千六百
廉積一萬二千
大方積四萬
小廉積二千零八十
二百六十

又設方田積七萬一千八百二十四步求方邊法曰置積于中為實初商二百步于左亦置二百步于右為方法左右對呼除實四萬步餘三萬一千八百二十四步倍方法得四百步為廉法

次商六十步于左初商之次亦置六十步于廉法之次為隅法先以次商與廉法對呼除實二萬四千步再以次商與隅法對呼除實三千六百步餘實四千二百二十四步又倍次商得一百二十步並右廉法共五百二十步復為廉法三商八步于左初商次商之次共二百六十八步亦置八步于右廉法之次復為隅法先以三商與廉法對呼除實四千一百六十步再以三商與隅法對呼除實六十四步恰盡于左初次三商共得二百六十八步即所求方邊之數

解曰此與前條無異但前二位此三位耳初商次商不能盡故三商之如三商又不盡則四商五商倣此

十一則

方邊求斜弦

設方田方五十步求弦法曰置方數自乘（得二千五百步）倍之（得五千步）平方開之（本卷十則）得七十步零七分有奇即所求

解曰甲乙丙丁方形作甲丁丙乙弦線次作巳庚辛壬方形令方邊與甲

丁方形之弦線等則庚壬方形必倍大于甲丁方形何也甲丁形内丁戊丙丙戊甲甲戊乙乙戊丁三角形四是四三角形當一甲丁方形也形外丁丙巳乙丁壬甲乙辛丙甲庚三角形亦四各與甲丁形内四三角形等是形外四三角形又當一甲丁方形矣因知斜弦自乘之方形即庚壬方形倍大于方邊自乘之方形即甲丁方形法置方邊自乘即甲丁方積也倍之即庚壬方積也平方開之得庚壬方形之邊即得甲丁方形之弦也

十二則

斜弦求方邊

設方田弦長七十步零七分有奇求方邊法曰置弦自乘（得五千步）折半（得二千五百步）平方開之得五十步即所求

解曰置弦自乘求庚壬方積也（圖同上則）折半即甲丁方積也故平方開之得甲乙

十三則

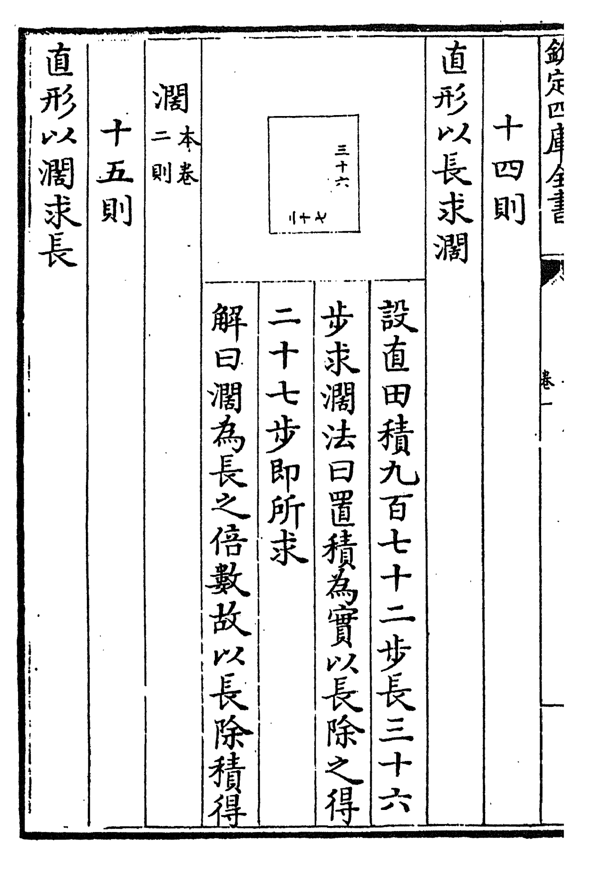
直積求長與濶（即帶縱開平方）

設直田積九百七十二步長濶差九步求長與濶法

曰置積四因之（得三千八百八十八步）又長濶差自乘（得八十一步）兩數并（共三千九百六十九步）平方開之得六十三步加長濶差（共七十二步）折半得三十六步即長以長濶差減長餘二十七步即濶

解曰一線任兩分之兩分線矩內形四及兩分線之較線上方形一并與元線上方形等如圖甲乙線兩分于丙丙子庚癸已壬辛丑四線各與乙丙等庚子已癸辛壬丙丑四線各與甲丙等則丙庚庚已已辛

辛丙四形必兩分線矩内形也辛丑既等于丙乙壬辛又等于甲丙則丑壬必兩分線之較線壬癸癸子子丑又各等于丑壬則癸丑形必較線上方形矣甲乙元線上方形不與五形並等乎直田積即兩分線矩内形也四因之者矩内形四也長濶差自乘即較線上方形也五形並等于元線上方形故平方開之得甲乙元線即長濶相和之度也開方所得之長濶六十三步和增一長濶差即兩長兩長折半非一長而何以長濶差減長非濶而何



十四則

直形以長求濶

設直田積九百七十二步長三十六步求濶法曰置積為實以長除之得二十七步即所求

解曰濶為長之倍數故以長除積得濶本卷二則

十五則

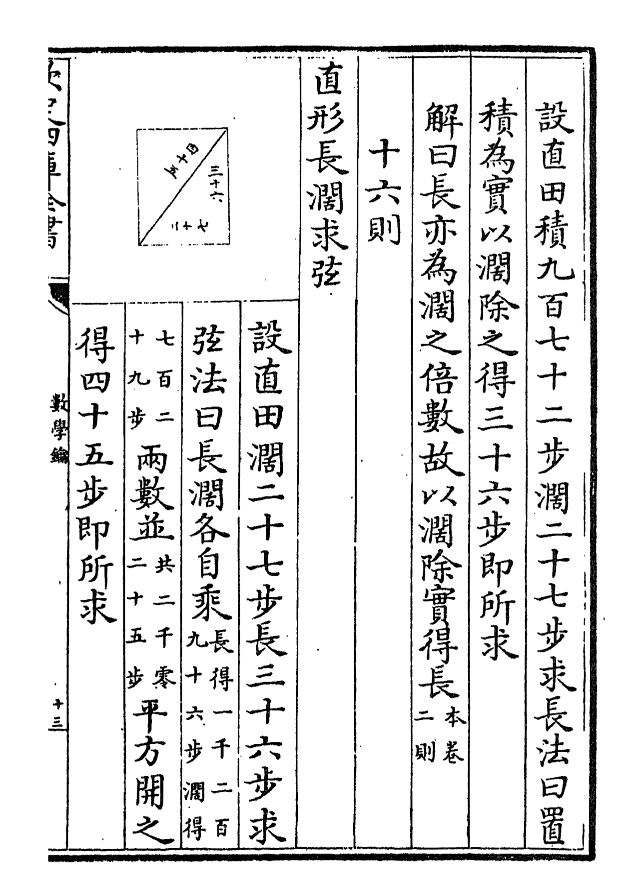
直形以濶求長

設直田積九百七十二步濶二十七步求長法曰置積為實以濶除之得三十六步即所求

解曰長亦為濶之倍數故以濶除實得長（本卷二則）

十六則

直形長濶求弦



設直田濶二十七步長三十六步求弦法曰長濶各自乘（長得一千二百九十六步濶得七百二十九步）兩數並（共二千零二十五步）平方開之得四十五步即所求

解曰此即勾股求弦（六卷一則）

十七則

直形濶弦求長

設直田濶二十七步弦四十五步求長法曰弦濶各自乘（弦得二千零二十五步濶得七百二十九步）兩數相減（餘一千二百九十六）平方開之得三十六步即所求

解曰此即勾弦求股（六卷二則）

十八則

直形長弦求濶

設直田長三十六步弦四十五步求濶法曰弦長各自乘弦得二千零二十五步長得一千二百九十六步兩數相減餘七百二十九步平方開之得二十七步即所求

解曰此即股弦求勾六卷三則

十九則

直形長及弦濶差求濶

設直田長三十六步弦濶差一十八步求濶法曰長與弦濶差各自乘長得一千二百九十六步弦濶差得三百二十四步兩數相減餘九百七十二步折半得四百八十六步以弦濶差為法除之得

二十七步即所求

解曰此即股與勾弦較求勾六卷十四則

二十則

直形濶及弦長差求長

設直田濶二十七步弦長差九步求長法曰置濶自乘得七百二十九步以弦長差為法除之得八十一步減弦長差餘七十二步折半得三十六步即所求

解曰此即勾與股弦較求股六卷十五則

二十一則

直形弦及長濶和求長濶差

設直田長濶和六十三步弦四十五步求長濶差法曰置弦自乘得二千零二十五步倍之得四千零五十步另置長濶和自乘得三千九百六十九步兩數相減餘八十一步平方開之得九步即長濶差以減長濶和餘五十四步折半得二十七步即濶加長濶差得三十六步即長

解曰此即弦與勾股和求勾股較六卷七則

二十二則

直形長及弦濶和求濶

設直田弦濶和七十二步長三十六步求濶法曰置長自乘得一千二百九十六步以弦濶和為法除之得一十八步即弦濶差以減弦濶和餘五十四步折半得二十七步即所求

解曰此即股與勾弦和求勾弦較六卷十八則

二十三則

直形濶及弦長和求長

設直田弦長和八十一步濶二十七步求長法曰置濶自乘得七百二十九步以弦長和為法除之得九步即弦

長差以減弦長和餘七十二步折半得三十六步即所求

解曰此即勾與股弦和求股弦較六卷十九則

二十四則

直形弦及長濶差求長與濶

設直田長濶差九步弦四十五步求長與濶法曰置弦自乘得二千零二十五步倍之得四千零五十步另置長濶差自乘得八十一步兩數相減餘三千九百六十九步平方開之得六十三步即長濶和加長濶差共七十二步折半得三十六步即長減長濶差餘二十七步即濶

解曰此即弦與勾股較求勾股和六卷十則

二十五則

直形長弦和及闊弦和求長與闊

設直田長弦和八十一步闊弦和七十二步求長與闊法曰置長弦和以闊弦和乘之得五千八百三十二步倍之得一萬一千六百六十四步平方開之得一百零八步與長弦和相減餘二十七步即闊與闊弦和相減餘三十六步即長

解曰此即勾弦和股弦和求勾與股六卷十三則

二十六則

直形長弦差及濶弦差求長與濶

設直田長弦差九步濶弦差一十八步求長與濶法曰置長弦差以濶弦差乘之得一百六十二步倍之得三百二十四步平方開之得一十八步加濶弦差得三十六步即長加長弦差得二十七步即濶

解曰此勾弦較股弦較求勾與股六卷二十則

二十七則

直形積及長濶和求長濶差

設直田長濶和六十三步積九百七十二步求長濶差法曰置長濶和自乘得三千九百六十九步另置積四因之得三千八百八十八步兩數相減餘八十一步平方開之得九步即所求

解曰長濶和自乘之方積當直田積四長濶差自乘之方積一故以長濶和自乘減去四直田積餘以平方開之得長濶差也本卷十三則

二十八則

直形積及長濶和求弦

設直田積九百七十二步長濶和六十三步求弦法

曰置長濶和自乘（得三千九百六十九步）另置積倍之（得一千九百四十四步）兩數相減（餘二千零二十五步）平方開之得四十五步即所求

解曰甲戊形長濶和自乘之方也庚辛形弦自乘之方也甲戊形內勾股八及長濶差自乘之方一庚辛形內勾股四及長濶差自乘之方一每二勾股當一直形（如一丙乙丑辛直形內有乙丙辛丑辛丙

（兩勾股形）是長濶和上方形大于弦上方形之較為二直田積也故法以長濶和自乘減去二直田積平方開之即得弦度也

二十九則

兩邊等之三角形求對角之垂線

設三角田底濶六步兩餘邊各五步

求中長法曰置底折半（得三步）自乘（得九步）餘邊亦自乘（得二十五步）兩數相減（餘一十六步）平方開之得四步即所求

解曰丙乙作弦乙丁作勾以所求之丙丁作股此即勾弦求股法也六卷二則甲乙邊折半即得勾者以乙丙丙甲兩邊等也設兩邊不等此法不行矣則有下法在

三十則

有一方角之三角形求對角之垂線

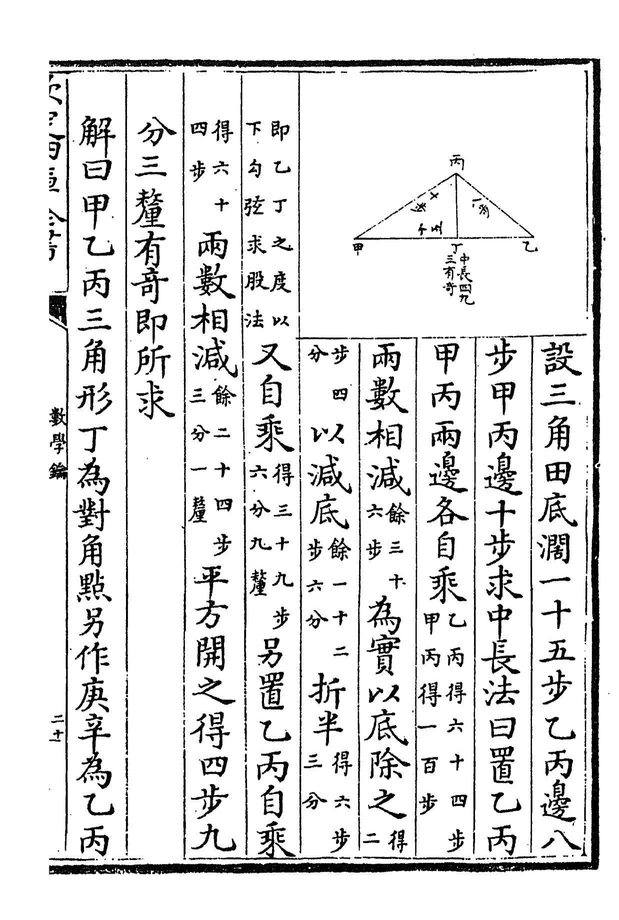
設不等邊三角田有一方角丙為方角即勾股田底濶十步乙丙邊六步甲丙邊八步求中長法曰置乙丙邊自乘得三十六步以底除之得三步六分〇此即丁乙之度以下仍勾弦求股法又自乘

得一十二步九分六釐與丙乙邊自乘之數相減餘二十三步零四釐平方開之得四步八分即所求

解曰此勾股求對角垂線法也六卷二十五則因有方角故用之若無方角此法又窮矣更有一法不問等邊方角與否皆可求如下則

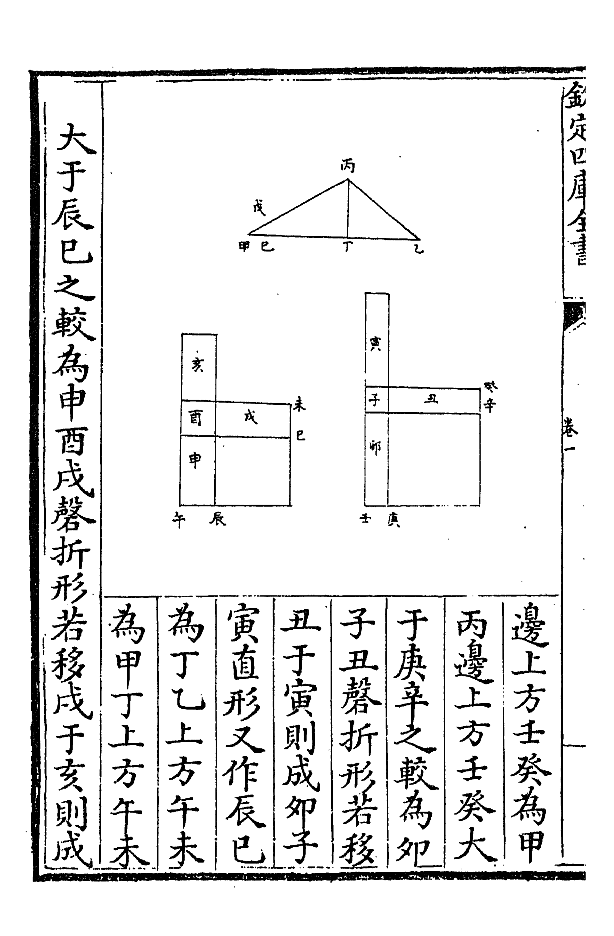
三十一則

不等邊而無方角之三角形求對角之垂線



設三角田底濶一十五步乙丙邊八步甲丙邊十步求中長法曰置乙丙甲丙兩邊各自乘乙丙得六十四步甲丙得一百步兩數相減餘三十六步為實以底除之得二步四分以減底餘一十二步六分折半得六步三分即乙丁之度以下勾弦求股法又自乘得三十九步六分九釐另置乙丙自乘得六十四步兩數相減餘二十四步三分一釐平方開之得四步九分三釐有奇即所求

解曰甲乙丙三角形丁為對角點另作庚辛為乙丙



邊上方壬癸為甲丙邊上方壬癸大于庚辛之較為夘子丑磬折形若移丑于寅則成夘子寅直形又作辰巳為丁乙上方午未為甲丁上方午未大于辰巳之較為申酉戌磬折形若移戌于亥則成

申酉亥直形申酉亥與卯子寅兩直形必相等何也甲乙丙三角形以丙丁線分之則成丁乙丙丁甲丙兩勾股形既皆勾股形則丙乙弦上方形必與丙丁股乙丁勾上兩方形並等甲丙弦上方形必與丙丁股甲丁勾上兩方形並等六卷一則從此推之則甲丙上方形大于丙乙上方形之容必與丙丁甲丁上兩方形大于丙丁乙丁上兩方形之容等試減去同用之丙丁上方形則甲丙上方形大于乙丙上方形之卯子寅直形與甲丁上方形大于乙丁上方形之申酉

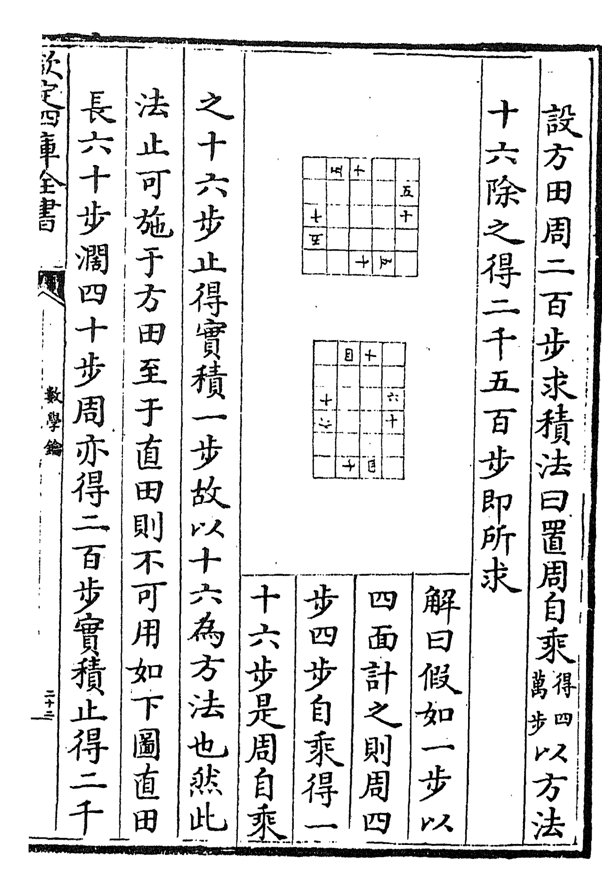
亥直形必相等矣法以乙丙甲丙上兩方形相減餘即夘子寅直形之容亦即申酉亥直形之容也夫申酉亥直形以甲乙底為長以甲丁乙丁兩線並為長即以甲乙全線為長以甲丁乙丁之較線甲巳為濶者也故以甲乙底除之得甲巳甲巳既為甲丁乙丁之較線于甲乙線減去甲巳則巳丁乙丁兩線等矣故折半得乙丁餘仍勾

弦求股法六卷二則同前則

三十二則

方周求積

設方田周二百步求積法曰置周自乘（得四萬步）以方法十六除之得二千五百步即所求



解曰假如一步以四面計之則周四步四步自乘得一十六步是周自乘之十六步止得實積一步故以十六為方法也然此法止可施于方田至于直田則不可用如下圖直田長六十步濶四十步周亦得二百步實積止得二千

四百步如以前法求之則多積百步矣

三十三則

方環以周求積

設方環田外周二百八十步内周一百二十步求積

法曰二周各自乘（外周得七萬八千四百步 内周得一萬四千四百步）兩數相減餘（六萬四千步）以方法十六除之得四千步即所求

解曰此方内減方法也○如知環濶則用梯田法置兩周相並折半以濶

乘之即得環積

三十四則

方環以積及濶求邊

設方環田積四千步濶二十步求内外邊法曰置濶自乘（得四百步）以四因之（得一千六百步）以減環積（餘二千四百步）餘積

丁	己	丙
辛		庚
乙	戊	甲

以四歸之（得六百步）以濶除之得三十步即内邊倍濶（得四十步）加之得七十步即外邊

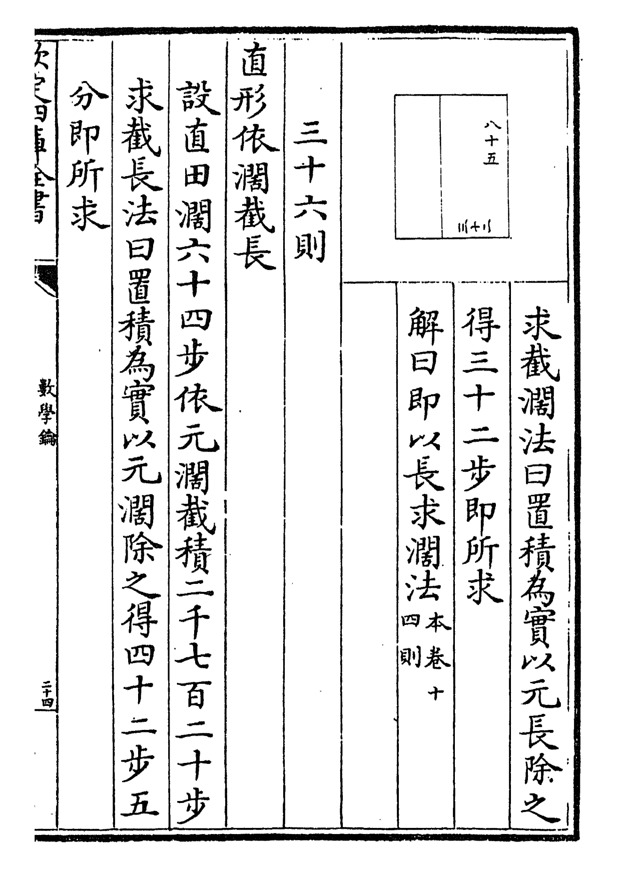
解曰法以環濶自乘者求環之隅方

也即甲等以四因之者環之隅有四也即甲乙丙丁四方形以減環積所餘必四直形也即戊己庚辛四直形四歸之者取四直形之一也以濶除之即得內邊者其直形以環之濶為濶以內邊之度為長也加兩濶即得外邊者外邊大于內邊之較為兩濶也○或四因環濶除積得五十步即直方兩形並之共長加濶得外邊減濶得內邊

三十五則

直形依長截濶

設直田長八十五步依元長截積二千七百二十步



求截濶法曰置積為實以元長除之得三十二步即所求

解曰即以長求濶法本卷十四則

三十六則

直形依濶截長

設直田濶六十四步依元濶截積二千七百二十步求截長法曰置積為實以元濶除之得四十二步五分即所求

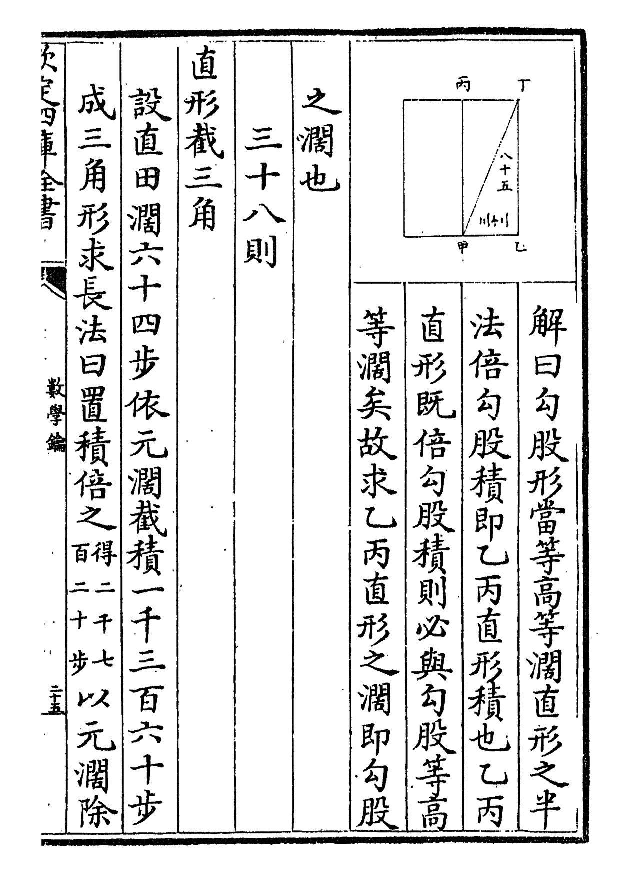
四十二五

解曰即以濶求長法（本卷十五則）

三十七則

直形截勾股

設直田長八十五步依元長截積一千三百六十步成勾股形法曰置積倍之（得二千七百二十步）以元長除之得三十二步即所求



解曰勾股形當等高等濶直形之半法倍勾股積即乙丙直形積也乙丙直形既倍勾股積則必與勾股等高等濶矣故求乙丙直形之濶即勾股之濶也

三十八則

直形截三角

設直田濶六十四步依元濶截積一千三百六十步成三角形求長法曰置積倍之得二千七百二十步以元濶除

之得四十二步五分即所求

解曰三角形亦當等高等濶直形之半法倍三角積即甲乙直形積也甲乙直形既倍三角積則必與三角形等高等濶矣故求甲乙直形之長即三角形之長也

三十九則

直形截斜方

設直田長八十五步依元長截積二千七百二十步成斜方形兩濶相差五步求兩濶法曰置積為實以

元長除之得三十二步另置相差五步折半得二步五分並三十二步得三十四步五分即大邊減三十二步得二十九步五分即小邊

解曰以元長除積者求甲乙直形之闊也甲乙直形之闊為斜方兩闊之中度謂小于大邊二步五分大于小邊亦二步五分故置差折半增減之即得兩闊

四十則

直形截梯形

設直田濶六十步依元濶截積三千七百八十步成梯形兩濶相差一十二步求長法曰置積為實倍元濶得一百二十步減相差一十二步餘一百零八步折半得五十四步為法除之得七十步即所求

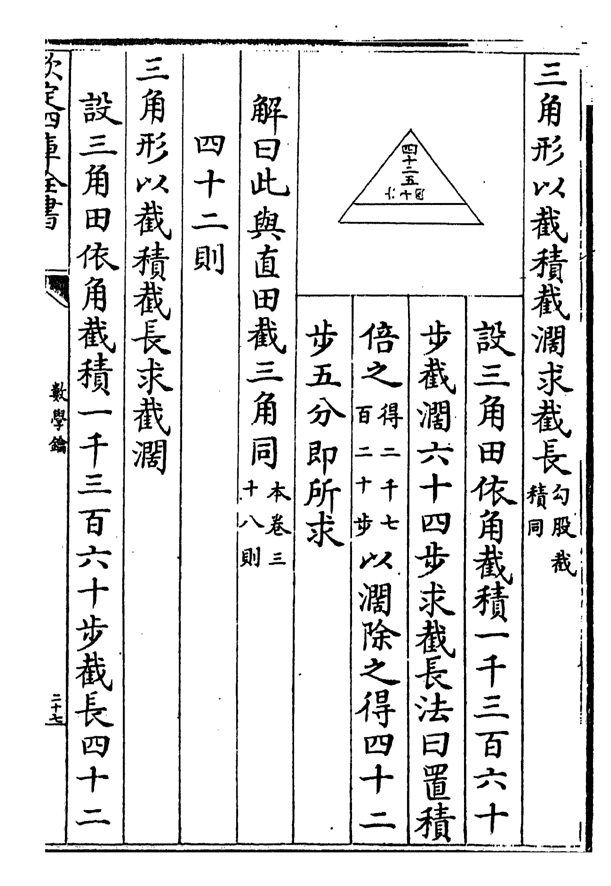
乙　七十　甲

解曰倍濶減差折半者求甲乙直形之濶也甲乙直形濶為梯形兩邊之中度謂小于大邊六步大于小邊亦六步則直形之容必與梯形等故求直形之長即得梯形之長

四十一則

三角形以截積截濶求截長（勾股截積同）

設三角田依角截積一千三百六十步截濶六十四步求截長法曰置積倍之（得二千七百二十步）以濶除之得四十二步五分即所求



解曰此與直田截三角同（本卷三十八則）

四十二則

三角形以截積截長求截濶

設三角田依角截積一千三百六十步截長四十二

步五分求截濶法曰置積倍之得二千七百二十步以長除之得六十四步即所求

解曰此與直田截勾股同本卷三十七則

四十三則

三角形以截長求截濶

設三角田元長二百步濶一百五十步自角截長一百五十步求截濶法曰置截長為實以元濶乘之得二萬二千五百步以元長除之得一百一十二步五分即所求

解曰凡三角形任以一線分之分線若與底線平行

則分形之比例必各與全形等謂丙丁與丁戊若丙甲與甲乙丁戊與丙庚若甲乙與丙巳又丁戊與甲乙若丙丁與甲丙丙庚與丙巳也泰西幾何原本甲乙丙即元形丁戊丙即截形也則截長與截濶之比例必若元長與元濶矣截濶與元濶之比例亦必若截長與元長矣謂截長大于截濶幾分之幾則元長亦大于元濶幾分之幾截濶小于元濶幾分之幾則截長亦小于元長幾分之幾法以

元濶乘截長以元長除之者借元長及元濶之比例因截長以求截濶也求比例用異乘同除法詳三卷五則

四十四則

三角形以截濶求截長

設三角田元長二百步濶一百五十步截濶一百一十二步五分求截長法曰置截濶為實以元長乘之得二萬二千五百步以元濶除之得一百五十步即所求

解曰此借元濶元長之比例因截濶以求截長也

四十五則

三角形以截積求截長

設三角田元長二百步濶一百五十步自角截積八千四百三十七步五分求截長法曰置積倍之得一萬六千八百七十五步為實以元長乘之得三百三十七萬五千步以元濶除之得二萬二千五百步平方開之得一百五十步即所求

元長二百
一百五十
一百五十

丙 壬 戊 辛 丁 庚 甲 己 乙

解曰甲乙丙即元形丁戊丙即截形丁壬為截形等高等濶之直形辛壬

為截長丙庚線上方形丁壬辛壬兩形之高必相等兩形既等高則其比例必若丁戊與辛戊幾何原本云凡兩形等高形與形之比例若線與線辛戊與截長丙庚等而丁戊即截濶是丁壬與辛壬之比例若截濶與截長也分形之比例元與全形等本卷四十三則則丁壬與辛壬之比例又若元濶與元長矣法倍截積者求丁壬直形也以元長乘元濶除之者借元長元濶之比例因丁壬直形以求辛壬方形也辛壬為截長丙庚上方形故平方開之得截長也

四十六則

三角形以截積求截濶

設三角田元長二百步濶一百五十步自角截積八千四百三十七步五分求截濶法曰置截積倍之得一萬六千八百七十五步為實以元濶乘之得二百五十三萬一千二百五十步以元長除之得一萬二千六百五十六步二分五釐平方開之得一百一十二步五分即所求

解曰甲乙丙即元形丁戊丙即截形丁壬為截形等高等濶之直形丁辛為截濶丁戊上方形丁壬丁辛兩形之濶必相等兩形既等濶則其比例必若戊壬與戊辛戊辛與截濶等戊壬與截長等是丁壬與丁辛之比例若截長與截濶亦若元長與元濶矣法倍截積者求丁壬直形也以元濶乘元長除之者借元長元濶之比例因丁壬直形以求丁辛方形也丁辛為截濶丁戊上方形故平方開之得截濶也〇以上皆自角截積法若自底截積則以截積減元積餘積

亦以上法求之得濶即截濶得長減元長餘為截長

四十七則

斜方形以截積截長求截濶梯形截積同

元長九十

三十五

丙 乙 甲

設斜方田元長九十步大邊濶三十八步小邊濶二十步依小邊截積八百二十二步五分截長三十五步求截濶

法曰置積為實以截長除之得二十三步五分倍之得四十七步減小

邊元濶餘二十七步即所求

解曰以截長除積者求甲丙直形之濶甲乙也甲乙為小邊及截濶之中度倍之則與小邊及截濶並等矣故減小邊即得截濶也

四十八則

斜方形以截積截濶求截長

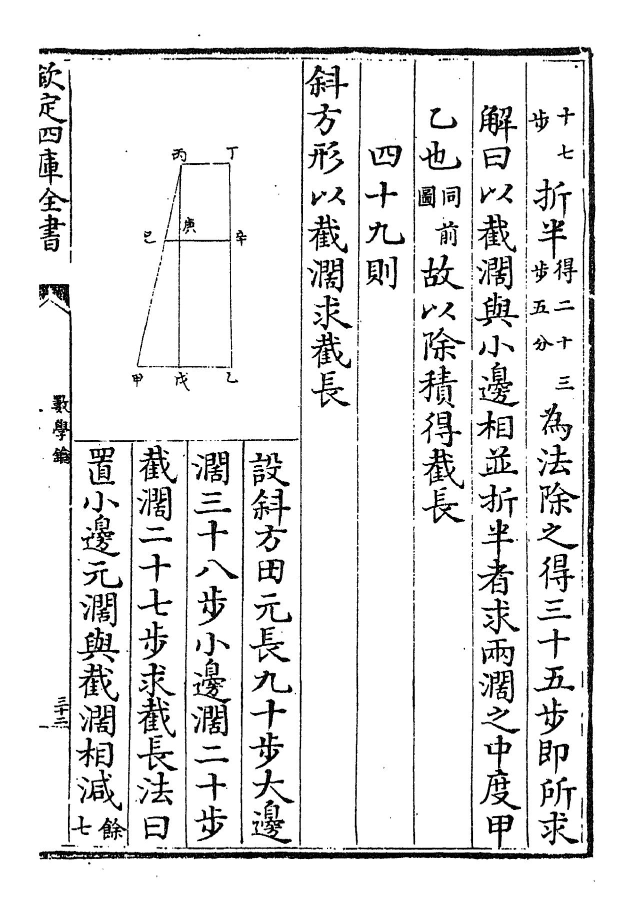
設斜方田元長九十步大邊濶三十八步小邊濶二十步依小邊截積八百二十二步五分截濶二十七步求截長法曰置積為實以截濶與小邊元濶並得四

十七步折半得二十三步五分為法除之得三十五步即所求

解曰以截濶與小邊相並折半者求兩濶之中度甲乙也同前圖故以除積得截長

四十九則

斜方形以截濶求截長



設斜方田元長九十步大邊濶三十八步小邊濶二十步截濶二十七步求截長法曰置小邊元濶與截濶相減餘七

步為實以元長乘之得六百三十步另以兩元濶相減餘一十八步除之得三十五步即所求

解曰小邊與截濶相減所餘必庚已兩元濶相減所餘必甲戊庚已與截長之比例若甲戊與元長也與三角形同本卷四十三則

五十則

斜方形以截長求截濶

設斜方田元長九十步大邊濶三十八步小邊濶二十步自小邊截長三十五步求截濶法曰置截長為

實以兩元濶相減餘一十八步乘之得六百三十步以元長除之得七步並小邊元濶得二十七步即所求

解曰七步即己庚之度也圖同前故加小邊元濶得截濶餘同前解

五十一則

斜方形依小邊截積求截濶

設斜方田元長九十步大邊濶三十八步小邊濶二十步自小邊截積八百二十二步五分求截濶法曰

置積爲實以兩元濶相減餘一十八步乘之得一萬四千八百零五步

以元長除之（得一百六十四步五分）倍之（得三百二十九步）另以小邊元濶自乘（得四百步）兩數並（共七百二十九步）平方開之得二十七步即所求

解曰甲乙丙丁全形巳辛丙丁截形丙丁與甲乙為兩元濶辛巳為截濶丙戊為元長丙庚為截長庚巳為小邊與截濶之較線甲戊為兩元濶之較線癸辛為截濶上方形子辛為小邊上方形（庚辛與丙丁等）癸辛之大于子辛

者為丑寅兩廉與卯一隅卯隅即較線庚己上方形也截形以丙庚線分之必成庚丁一直形己丙庚一勾股形若以截長丙庚除直形必得辛庚線再以較線己庚乘之必成一廉（兩廉俱以小邊為長以較線為濶）若以截長丙庚除勾股必得庚壬線庚壬者庚己之半也再以庚己乘之必成半隅然直形與勾股兩形實一截形之分也若以己庚乘截積以丙庚除之亦必得一廉半隅也又全形之比例與截形等（本卷四十九則）丙戊之與甲戊必若丙庚之與己庚故置截積以元長丙戊除

之以兩邊較線甲戊乘之亦得一廉半隅與前同倍之則成兩廉一隅夫小邊上方形之小于截濶上方形者此兩廉一隅也並之則成截濶上方形矣故平方開之得截濶

五十二則

斜方形依大邊截積求截濶

設斜方田元長九十步大邊濶三十八步小邊濶二十步自大邊截積一千七百八十七步五分求截濶

法曰置積為實以兩元濶相減餘一十八步乘之得三萬二千一

百七十五步以元長除之得三百五十七步五分倍之得七百一十五步另以大邊元濶自乘得一千四百四十四步兩數相減餘七百二十九步平方開之得二十七步即所求

解曰既自大邊截積則元形之大邊亦即截形之大邊而截濶為小邊小邊上方形之小于大邊上方形者兩廉一隅也故于大邊上方形内減去兩廉一隅平方開之即得截濶○若並求長得濶用

本卷四十八則法求之

五十三則

梯形截勾股

設梯田元長一百二十步大邊濶八十步小邊濶二十步自一角截勾股積三百四十八步四分八釐求截濶法曰置積倍之得六百九十六步九分六釐以兩元濶相減餘六十步折半得三十步乘之得二萬零九百零八步八分以元長除之得一百七十四步二分四

丙　丁
截濶一十三二
一百二十
庚
甲　戊　己　乙

釐平方開之得一十三步二分即所求

解曰甲乙丙丁梯形減去甲戊丙丁斜方所餘必戊丁乙勾股形截積亦勾股形則是勾股截勾股也故法同勾股（本卷四十六則）○若求長則倍截積以截濶除之即得（本卷三十八則）

五十四則

梯形截斜方

設梯田元長一百二十步大邊濶八十步小邊濶二十步截斜方積三千六百步求截濶法曰置積為實

丙　丁

一百二十

卅　十　四

甲　巳　庚　戊　乙

以元長除之得三十步另以兩元濶相減餘六十步四歸之得一十五步兩數並得四十五步即所求

解曰元長除截積得巳戊甲庚為大邊大于小邊之半甲巳又為甲庚之半則甲巳為大邊大于小邊四分之一矣故四歸兩濶之較並巳戊得截濶

五十五則

梯形截無法五邊形

設梯田元長一百二十步大邊濶八十步小邊濶二十步截五邊形即甲戊己丁丙積五千六百五十一步五分二釐求截濶法曰先求梯田全積本卷七則減去截積餘三百四十八步四分八釐以梯田截勾股法求之本卷五十三則得濶一十三步二分以減大邊元濶餘六十六步八分即所求

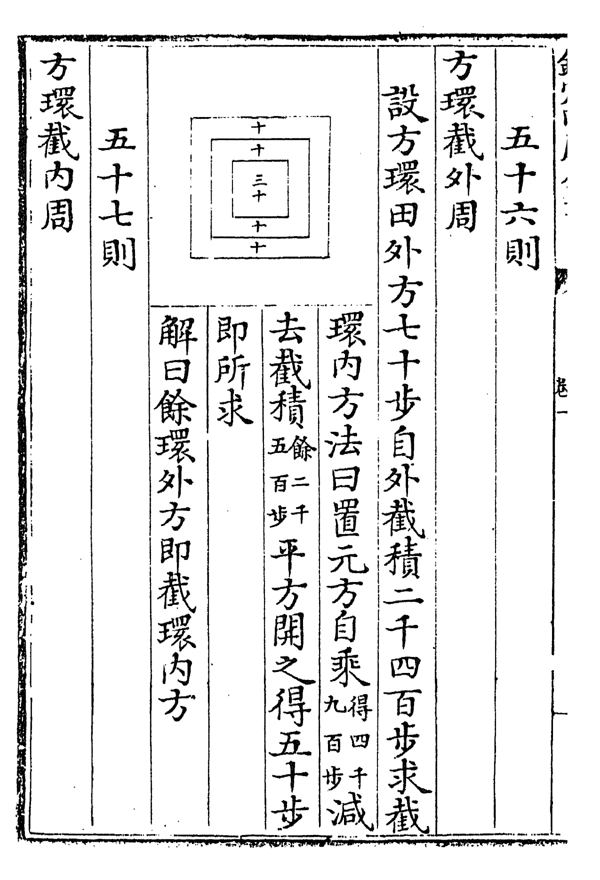
解曰一十三步二分者乙巳戊餘形之濶乙戊也大邊元濶甲乙減去乙戊餘甲戊即截濶

五十六則

方環截外周

設方環田外方七十步自外截積二千四百步求截環內方法曰置元方自乘（得四千九百步）減去截積（餘二千五百步）平方開之得五十步即所求

解曰餘環外方即截環內方

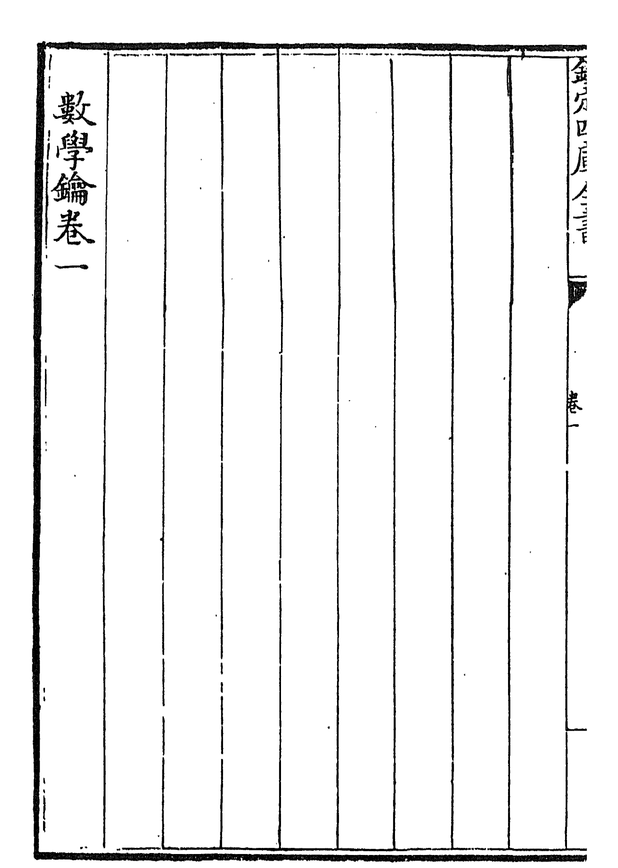


五十七則

方環截內周

設方環田內方三十步自內截積一千六百步求截環外方法曰置內方自乘得九百步與截積並得二千五百步平方開之得五十步即所求

解曰內方自乘者補環內虛形以便開方也



數學鑰卷一

欽定四庫全書

子部

數學鑰卷二

詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官進士臣朱鈐

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄錄監生臣王宮

欽定四庫全書

數學鑰卷二凡例

栢城杜知耕撰

凡例

一則

圓心中規不中規者不得為圓形形界曲線曰周如甲乙丙

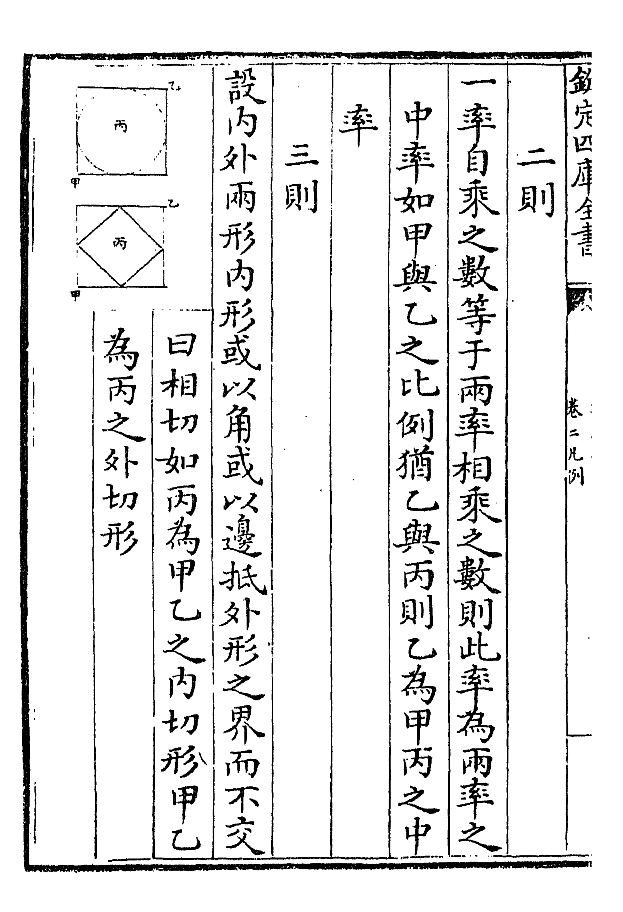
丁線過心直線曰徑如丙丁線

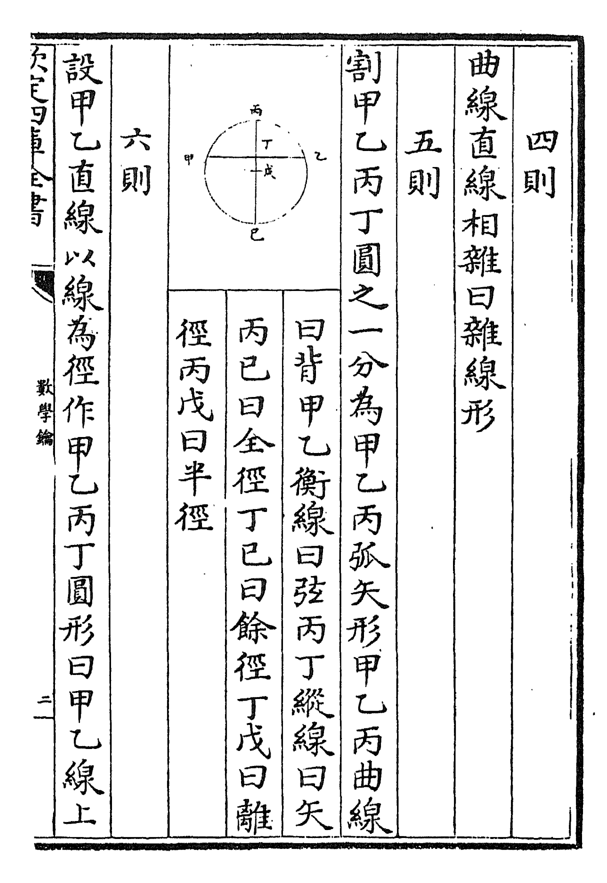
二則

一率自乘之數等于兩率相乘之數則此率為兩率之中率如甲與乙之比例猶乙與丙則乙為甲丙之中率

三則

設內外兩形內形或以角或以邊抵外形之界而不交曰相切如丙為甲乙之內切形甲乙為丙之外切形





四則

曲線直線相雜曰雜線形

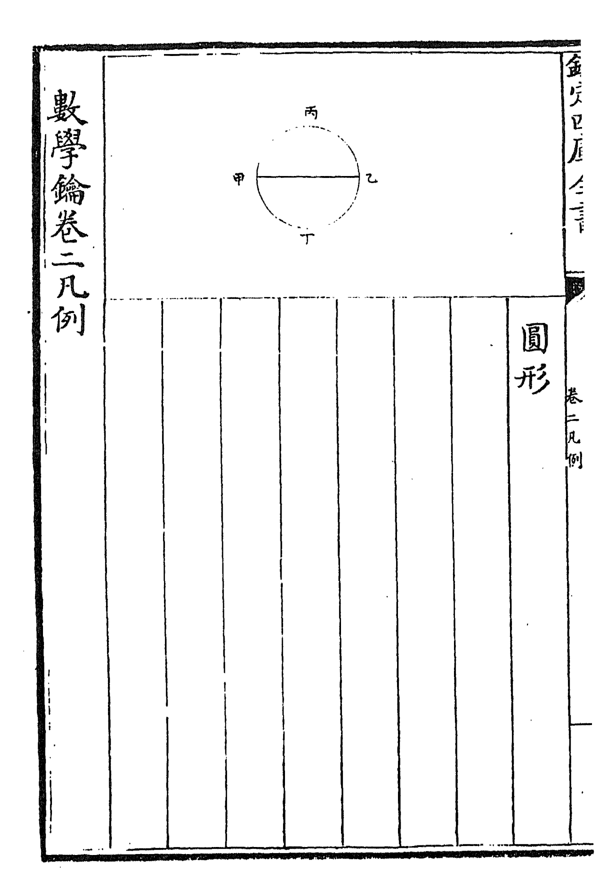
五則

割甲乙丙丁圓之一分為甲乙丙弧矢形甲乙丙曲線曰背甲乙衡線曰弦丙丁縱線曰矢丙巳曰全徑丁巳曰餘徑丁戊曰離徑丙戊曰半徑

六則

設甲乙直線以線為徑作甲乙丙丁圓形曰甲乙線上

圓形



欽定四庫全書

數學鑰卷二目録

栢城杜知耕撰

十五則圓環以全徑及虛徑求積

西法十六則撱圓求積

西法十七則弧矢求積

增十八則弧矢形以積矢弦及離徑求背

西法十九則弧矢形以矢弦求餘徑求全徑離徑半徑附

西法二十則弧矢形以矢徑求弦

二十一則弧矢形以離徑半徑求弦

西法二十二則弧矢形以弦及餘徑求矢

增 三十一則圓截圓

三十二則圓截弧矢

西法 三十三則弧矢形截雜線三角形

三十四則方内減圓以餘積求圓積

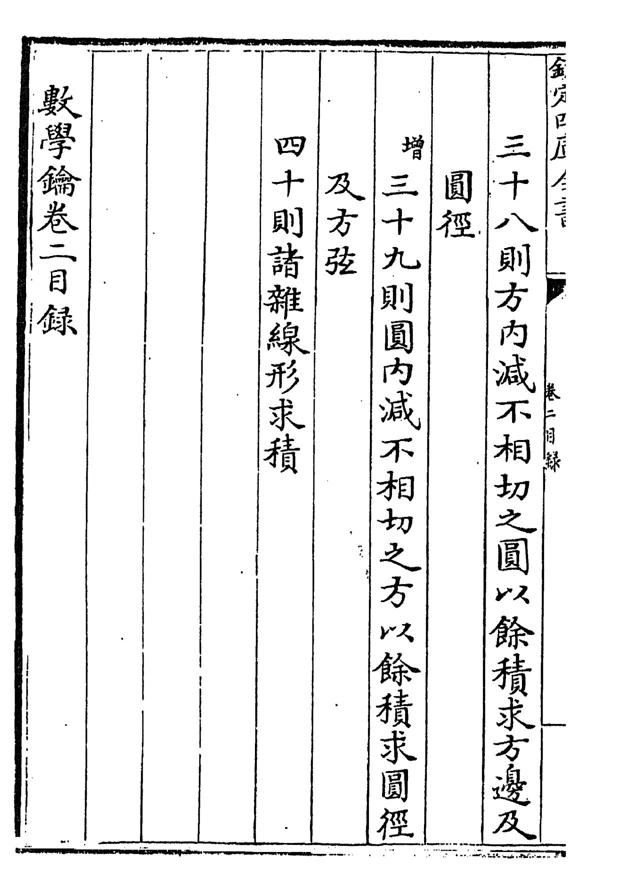
三十五則方内減圓以餘積求方積 求方邊圓徑

附

三十六則圓内減方以餘積求方積 求方邊圓徑

附

三十七則圓内減方以餘積求圓積



數學鑰卷二目録

數學鑰卷二

柘城杜知耕撰

方田下 曲線類

一則

圓徑求周

設圓田徑二十八步求周法曰置徑為實以周法二十二乘之得六百一十六步以徑法七除之得八十八步即所求

解曰徑法七周法二十二者徑與周之比例若七與二十二也何也西洋亞奇默德云圓徑與圓周三倍又七十之十則朒謂周不及此數也三倍又七十之十則盈謂周過于此數也先論三倍又七十之十曰丁甲乙半圜戊為心從甲作午子切線從乙從丁作乙己壬丁線各與乙戊半徑等設乙戊己角六十度己戊甲角必三十度為六邊形之半角也末從心過己過壬作戊午戊子線成戊午子等角形己戊壬既六

十度則午子為等角形之邊設甲午股一百五十三步則戊午弦必三百零六步（戊午元與午子等午子既倍大于甲午則戊午亦必倍大于甲午）各自乘甲午股得二萬三千四百零九步戊午弦得九萬三千六百三十六步兩數相減餘七萬零二百二十七步平方開之得二百六十五步有奇為戊甲勾（即半徑）則戊甲與甲午之比例為二百六十五步有奇與一百五十三步

次平分午戊甲角作戊庚線任分甲午于庚庚戊線割圜界于酉巳酉甲酉兩弧等兩弧既等則酉戊巳酉戊甲兩角必等故曰平分甲庚午兩線不等故曰任分

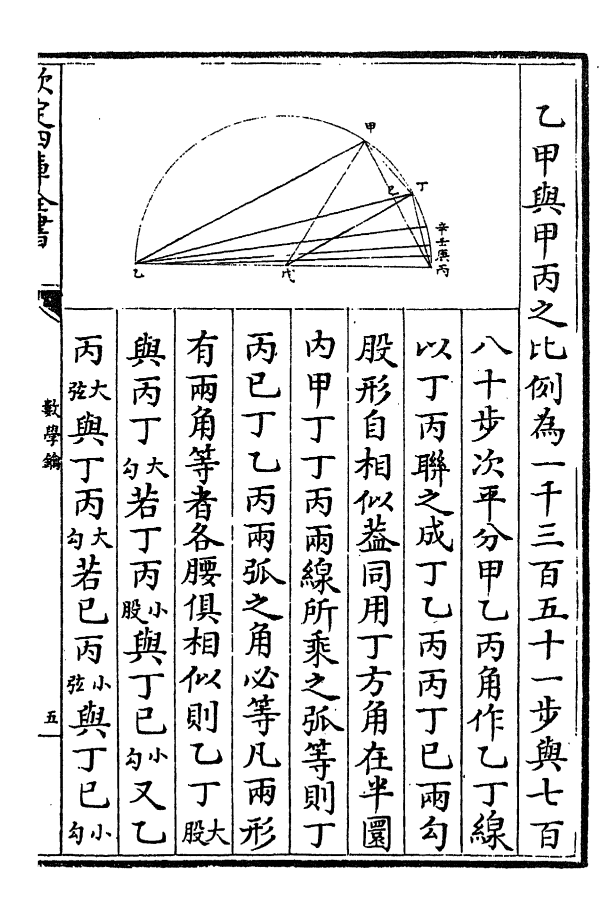
則午戊與戊甲若午庚與甲庚合之戊午甲而與戊甲若午庚偕甲庚而與甲庚更之戊午并戊甲而與甲午甲午即午庚偕甲庚若戊甲與甲庚先定戊午戊甲并為五百七十一步有奇午甲為一百五十三步則戊午并戊甲與甲午之比例若五百七十一步有奇與一百五十三步則戊甲與甲庚之比例亦若五百七十一步有奇與一百五十三步矣即以兩數各自

乘並而開方得五百九十一步又八之一不盡為庚戊線戊甲為勾甲庚為股庚戊為弦則庚戊與甲庚之比例若五百九十一步又八之一不盡與一百五十三步次平分庚戊甲角作戊辛線則戊庚並戊甲一千一百六十二步又八之一與庚甲一百五十三步若戊甲與甲辛若設甲辛為一百五十三步則戊甲為一千一百六十二步又八之一有奇兩數各自乘並而開方得一千一百七十二步又八之一為辛戊線甲戊為勾甲辛為股辛戊為弦則辛戊與辛甲之比例若一千一百七十二步

又八之一與一百五十三步次平分辛戊甲角作戊寅線則辛戊並戊甲二千三百三十四步又四之一與辛甲一百五十三步若戊甲與甲寅設甲寅為一百五十三步則戊甲為二千三百三十四步又四之一兩數各自乘並而開方得二千三百三十九步又四之一有奇為寅戊線戊甲為勾甲寅為股寅戊為弦則寅戊與寅甲之比例若二千三百三十九步又四之一有奇與一百五十三步次平分寅戊甲角作未戊線則寅戊並戊甲四千六百七十三步五分有奇與寅甲一百

五十三步若戊甲與甲未若設甲未為一百五十三步則戊甲為四千六百七十三步五分有奇子戊午為半圜三分之一即為全圜六分之一甲戊午為十二分之一甲戊庚為二十四分之一甲戊辛為四十八分之一甲戊寅為九十六分之一甲戊未為一百九十二分之一復作甲戊申角與甲戊未角等成未戊申三角形未甲申其切線也為九十六邊形之一邊此邊與全徑之比例若一百五十三步與四千六百七十三步五分未申倍大于未甲乙丁全徑亦倍大于甲戊半徑以一百

五十三步乘九十六邊得一萬四千六百八十八步則全邊與全徑之比例為一萬四千六百八十八步與四千六百七十三步五分約之為三又七之一不足夫形外切線尚不及三又七之一況圜周乎 次論三倍又七十一之十曰乙甲丙半圜乙丙徑戊心從丙作丙甲與半徑戊丙等甲丙即六邊形之一邊從乙作乙甲線成乙甲丙勾股形而甲為方角設甲丙勾為七百八十步乙丙弦為一千五百六十步兩數各自乘相減開方得一千三百五十一步不足為乙甲股則



乙甲與甲丙之比例為一千三百五十一步與七百八十步次平分甲乙丙角作乙丁線以丁丙聯之成丁乙丙丙丁巳兩勾股形自相似蓋同用丁方角在半圜内甲丁丁丙兩線所乘之弧等則丁丙巳丁乙丙兩弧之角必等凡兩形有兩角等者各腰俱相似則乙丁大股與丙丁大勾若丁丙小股與丁巳小勾又乙丙大弦與丁丙大勾若巳丙小弦與丁巳小勾

更之乙丙與巳丙兩弦若丁丙與丁巳兩勾是乙丁與丁丙兩股丁丙與丁巳兩勾乙丙與巳丙兩弦三比例皆等又乙丙與巳丙兩弦若乙丙並甲乙兩腰與甲丙底之兩分則乙丁與丁丙亦若乙丙並乙甲與甲丙先定乙甲一千三百五十一步弱乙丙一千五百六十步是乙甲乙丙並為二千九百一十一步弱甲丙先設七百八十步則乙丁與丁丙亦為二千九百一十一步弱與七百八十步各自乘並而開方得三千零一十三步又四之一弱為乙丙線乙丁丙形之弦則乙丙與丁丙之

比例為三千零一十三步又四之一弱與七百八十步次平分丁乙丙角作辛乙線依前論丁乙並乙丙與丙丁若乙辛與辛丙先定乙丙三千零一十三步又四之一弱乙丁二千九百一十一步弱並為五千九百二十四步又四之一弱今丙丁為七百八十步則乙辛與辛丙為五千九百二十四步又四之一弱與七百八十步欲省數改設辛丙二百四十步改設乙辛一千八百二十三步弱兩數各自乘並而開方得一千八百三十八步又十一之九弱為乙丙線乙辛

丙形之弦則二百四十步與一千八百三十八步又十一之九弱為丙辛乙辛之比例次平分辛乙丙角作乙壬線以壬丙線聯之辛乙乙丙兩數並三千六百六十一步又十一之九弱與辛丙二百四十步為乙壬與壬丙之比例又改設壬丙六十六步改設乙壬一千零七步弱兩數各自乘並而開方得一千零九步弱則六十六步與一千零九步弱為壬丙與乙丙之比例末平分壬乙丙角作乙庚線以庚丙線聯之乙庚與庚丙若壬乙並乙丙二千零一十六步又六之

一與丙壬六十六步兩數各自乘並而開方得二千零一十七步又四之一弱為乙丙線乙庚丙形之弦則庚丙與乙丙之比例為六十六步與二千零一十七步又四之一弱丙甲弧為全圜六分之一丙丁十二分之一丙辛二十四分之一丙壬四十八分之一丙庚九十六分之一是丙庚為九十六邊內切圜形之一邊也以六十六步乘九十六邊得六千三百三十六步為九十六邊內切形之周乙丙徑為二千零一十七步又四之一弱約之徑一周三又七十一之十強夫

圜内切線為三又七十一之十尚強況圜周乎。按三又七十一之十設徑一則周三一四零八四五零七零四二二有奇設周一則徑三一八三八五六五零二二再約之徑七十一步周二百二十三步三又七十之十設徑一則周三一四二八五七一四二八五七有奇設周一則徑三一八一八一八一八一八有奇再約之徑七步周二十二步兩數皆不能與周徑脗合但徑七周二十二其數少整姑從之

二則

圓周求徑

設圓田周八十八步求徑法曰置周為實以徑法七因之得六百一十六步以周法二十二除之得二十八步即所求

解曰即前法反用之

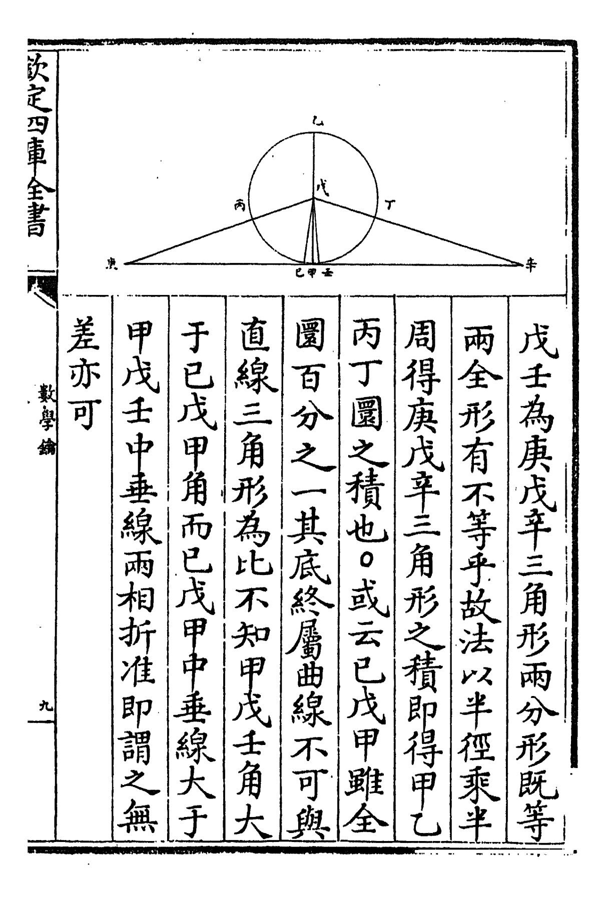
三則

圓周徑求積

設圓田周八十八步徑二十八步求積法曰置周折半得四十四步為實以徑折半得一十四步為法乘之得六百

一十六步即所求

解曰圓形與半徑為高全周為底之三角形等何也測量全義云甲乙丙丁圜自戊心百分之必皆成三角形而己戊甲其百分之一也次依甲戊半徑作庚戊辛三角形令庚辛底與圜之全周等自戊角百分之亦必皆成三角形而甲戊壬其百分之一也己戊甲甲戊壬兩分形己甲甲壬兩底既等又戊甲同高因推其容必等夫百倍己戊甲為甲乙丙丁全圜百倍甲



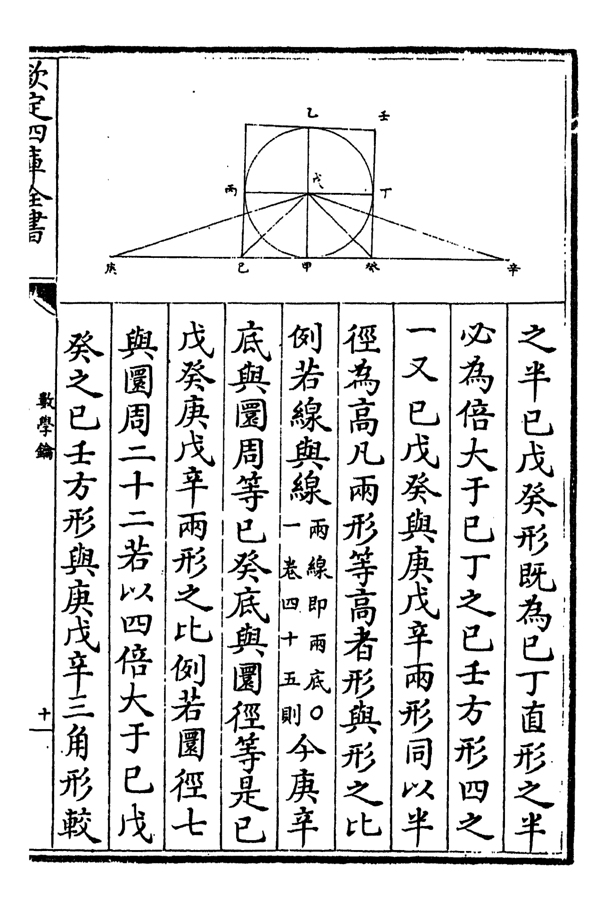
戊壬為庚戊辛三角形兩分形既等兩全形有不等乎故法以半徑乘半周得庚戊辛三角形之積即得甲乙丙丁圜之積也○或云己戊甲雖全圜百分之一其底終屬曲線不可與直線三角形為比不知甲戊壬角大于己戊甲角而己戊甲中垂線大于甲戊壬中垂線兩相折准即謂之無差亦可

四則

圓徑求積

設圓田徑二十八步求積法曰置徑自乘得七百八十四步再以十一乘之得八千六百二十四步以十四除之得六百一十六步即所求

解曰測量全義云甲乙丙丁圜庚戊辛三角形以半徑為高以圜周為底巳壬為圜徑上方形巳丁直形以全徑為濶以半徑為高而為巳壬方形之半巳戊癸三角形亦以全徑為濶半徑為高而為巳丁直形



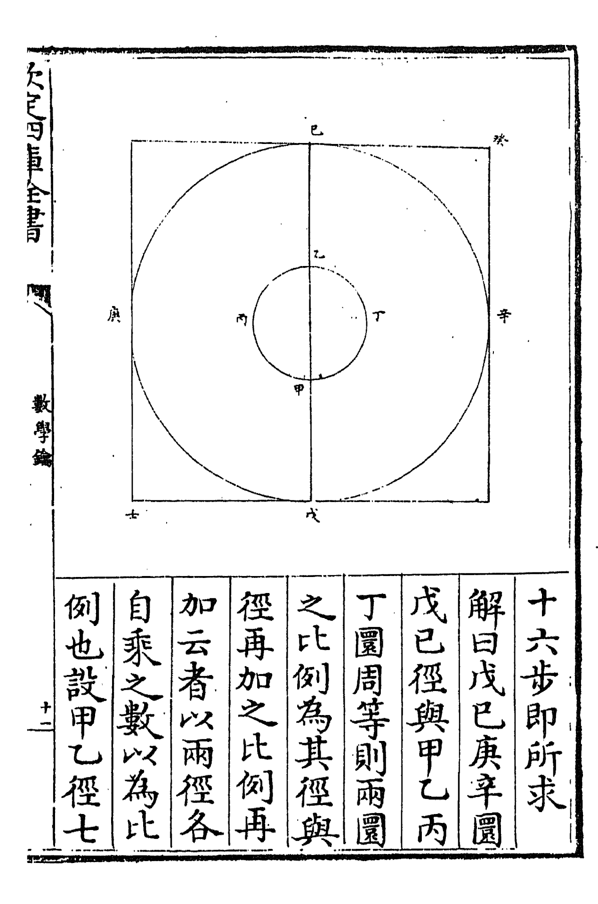
之半巳戊癸形既為巳丁直形之半必為倍大于巳丁之巳壬方形四之一又巳戊癸與庚戊辛兩形同以半徑為高凡兩形等高者形與形之比例若線與線兩線即兩底○一卷四十五則今庚辛底與圜周等巳癸底與圜徑等是巳戊癸庚戊辛兩形之比例若圜徑七與圜周二十二若以四倍大于巳戊癸之巳壬方形與庚戊辛三角形較

其比例必若二十八與二十二矣各以二約之為十四與十一夫庚戊辛三角形與圓形等本卷三則故方圓之比例亦若十四與十一法以圓徑自乘求已壬方形之積也以十一乘十四除取方積十四分之十一以為圓積也

五則

圓周求積

設圓田周八十八步求積法曰置周自乘得七千七百四十四步以七因之得五萬四千二百零八步以八十八除之得六百一



十六步即所求

解曰戊巳庚辛圜戊巳徑與甲乙丙丁圜周等則兩圜之比例為其徑與徑再加之比例再加云者以兩徑各自乘之數以為比例也設甲乙徑七

戊巳徑二十二甲乙自乘得四十九戊巳自乘得四百八十四是兩圜之比例若四十九與四百八十四又壬癸方形與戊巳庚辛圜元若十四與十一本卷四則今戊巳庚辛圜既為四百八十四壬癸方形必六百一十六是壬癸方形與甲乙丙丁圜必若六百一十六與四十九矣各以七約之為八十八與七法以圜周自乘即壬癸方形之積也以七乘八十八除取方積八十八分之七以為甲乙丙丁圜積也

六則

圓積求徑

設圓田積六百一十六步求徑法曰置積為實以十四乘之得八千六百二十四步以十一除之得七百八十四步平方開之得二十八步即所求

解曰以十四乘十一除者因圜積以求戊已方積也平方開之得方邊即得圜徑者方邊與圜徑等也

七則

圓積求周

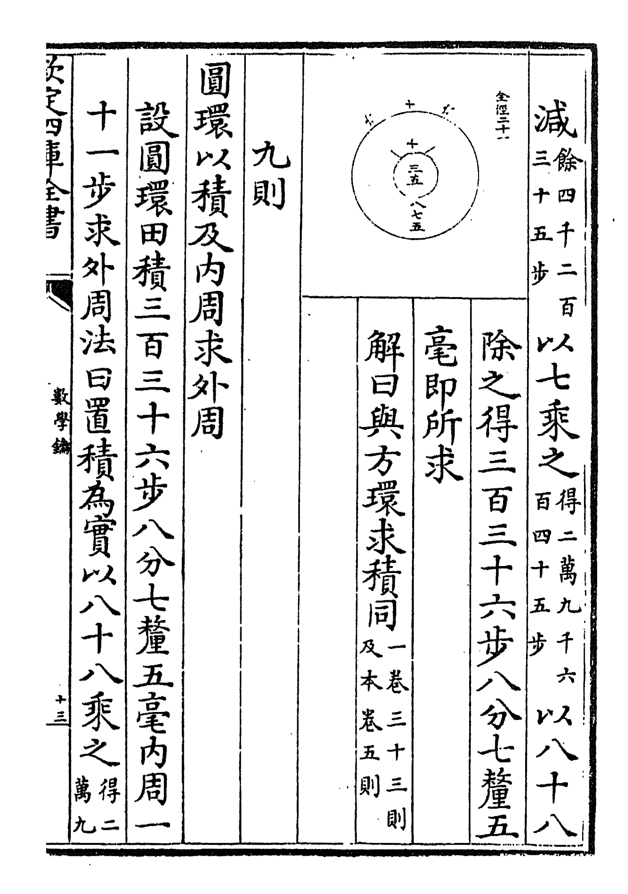
設圓田積六百一十六步求周法曰置積為實以八十八乘之得五萬四千二百零八步以七除之得七千七百四十四步平方開之得八十八步即所求

解曰以八十八乘七除者因圜積以求圜周上方積也本卷五則故平方開之得圜周

八則

圓環求積

設環田外周六十六步内周一十二步求積法曰置内外兩周各自乘外周得四千三百五十六步内周得一百二十一步兩數相



減餘四千二百三十五步以七乘之得二萬九千六百四十五步以八十八除之得三百三十六步八分七釐五毫即所求

解曰與方環求積同一卷三十三則及本卷五則

九則

圓環以積及内周求外周

設圓環田積三百三十六步八分七釐五毫内周一十一步求外周法曰置積為實以八十八乘之得二萬九

千六百四十五步以七除之得四千二百三十五步另置內周自乘得一百二十一步兩數並共四千三百五十六步平方開之得六十六步即所求

解曰兩數並共成周上方積故平方開之得外周

十則

圓環以積及外周求內周

設圓環田積三百三十六步八分七釐五毫外周六十六步求內周法曰置外周自乘得四千三百五十六步另置環積以八十八乘之得二萬九千六百四十五步以七除之得四千二

百三十五步兩數相減餘百二十一步平方開之得一十一步即所求

解曰外周上方積減去八十八乘七除之環積所餘即内周上方積也故平方開之得内周

十一則

圓環以積及内外周求環濶

設圓環田積三百三十六步八分七釐五毫外周六十六步内周一十一步求環濶法曰置積為實以兩周相並共七十七步折半得三十八步五分為法除之得八步七

分五釐即所求

解曰全圓既同三角形則圓環必同梯形圓環之兩周猶梯形之兩濶也圓環之濶猶梯形之中長也故用梯形求長法一卷四十八則即得環濶

十二則

圓環以兩周求環濶

設圓環田外周六十六步內周一十一步求環濶法曰置兩周各以七乘之外周得四百六十二步內周得七十七步各以二十二除之外周得二十一步內周得三步五分兩數相減餘一十七步五分折

半得八步七分五釐即所求

解曰外周所得者圓之全徑也内周所得者環内虚徑也全徑減虚徑所餘即環之兩濶故折半得一濶也

十三則

圓環以積及濶求兩周

設圓環田積三百三十六步八分七釐五毫濶八步七分五釐求兩周法曰置積為實以濶除之得三十八步五分另置濶以二十二乘之得一百九十二步五分以七

除之得二十七步五分與三十八步五分相並得六十六步即外周與三十八步五分相減得一十一步即內周

解曰此亦梯形求濶法也法以環濶除積所得之三十八步五分即兩環周之中度也環濶為全徑與虛徑相差之半以二十二乘七除則為內外兩周相差之半矣故以之增減兩周之中度得兩周也

十四則

圓環以積及濶求徑

設圓環田積三百三十六步八分七釐五毫濶八步

七分五釐求全徑及虛徑法曰置積以十四乘之得四千七百一十六步二分五釐十一除之得四百二十八步七分五釐另置濶自乘得七十六步五分六釐二毫五絲以四因之得三百零六步二分五釐兩數相減餘一百二十二步五分為實以四因濶得三十五步為法除之得三步五分即虛徑倍濶得一十七步五分加之得二十一步即全徑

解曰置積以十四乘十一除者令圓環積化為方環積也餘即方環求內方法一卷五十六則

十五則

圓環以全徑及虛徑求積

設圓環田全徑二十一步虛徑三步五分求積法曰

置兩徑各自乘全徑得四百四十一步虛徑得一十二步二分五釐兩數相減餘四百二十八步七分五釐以十一乘之得四千七百一十六步二分五釐十四除之得三百三十六步八分七釐五毫即所求

解曰兩徑各自乘相減者求方環積也十一乘十四除者因方環積以求圓環積也

十六則

橢圓求積

設橢圓田大徑九十步小徑四十步求積法曰置兩徑相乘得三千六百步以十一乘之得三萬九千六百步以十四除之得二千八百二十八步五分七釐有奇即所求

九十
四十

解曰西洋亞奇默德云取橢圓兩徑之中率為徑作圓其容與橢圓等四九之中率為六謂四之與六猶六之與九也夫求中率之法以兩徑相乘平方開之即得然中率自乘之數實即兩徑相乘之數故法以兩徑相乘十一乘十四除為橢圓

積也橢圓形狀不同恐不能無小差

十七則

弧矢求積

設弧矢田矢濶五步弦長一十七步三分二釐有奇背二十步零九分五釐二毫有奇離徑五步求積法

曰置背以離徑並矢共十步乘之得二百零九步五分二釐三毫有奇另置弦以離徑乘之得八十六步六分有奇兩數相減餘一百二十二步九分二釐三毫有奇

折半得六十一步四分六釐一毫有奇即所求

解曰甲乙丙弧矢形戊為圜心自甲自乙作甲戊乙戊兩線成甲戊乙丙雜線形其丙丁矢與丁戊離徑並即全圓之半徑甲丙乙背又為圓周之分線求積之法當與圓同夫圓以半徑乘周折半得積本卷三則則雜線形亦必以半徑乘背折半得積矣又雜線形內以甲乙線分之必成一甲乙丙弧矢形一甲戊乙三角形其三角形以甲乙弦為濶以丁戊離徑為高若以高乘濶折半必得三角形之積一卷五則于雜線形內

減去三角積所餘非弧矢積而何故法以半徑乘背離徑乘弦相減折半得積也相減而後折半與各折半而後相減得數同

十八則

弧矢形以積矢弦及離徑求背

設弧矢田積六十一步四分六釐一毫有奇矢五步弦一十七步三分二釐有奇離徑五步求背法曰置積倍之得一百二十二步九分二釐三毫有奇另置弦以離徑乘之得八十六步六分有奇兩數並得二百零九步五分二釐三毫有奇以矢

並離徑（共十步）除之得二十步零九分五釐二毫有奇即所求

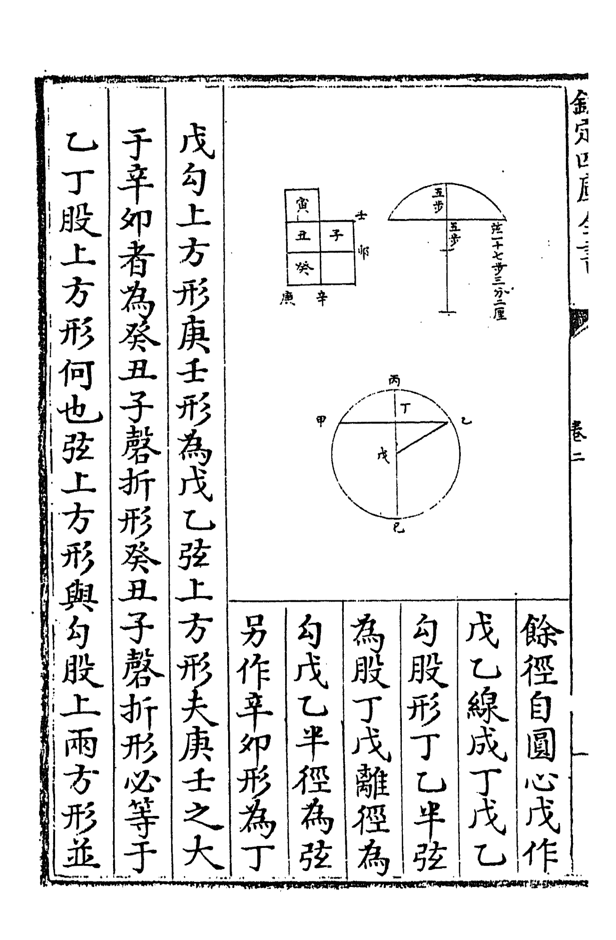
解曰即前則求積法反用之

十九則

弧矢形以矢弦求餘徑（求全徑離徑半徑附）

設弧矢田矢五步弦一十七步三分二釐有奇求餘徑法曰置弦折半（得八步六分六釐有奇）自乘（得七十五步）以矢除之得一十五步即所求

解曰甲乙丙弧矢形丙丁為矢丁戊為離徑丁巳為



餘徑自圓心戊作戊乙線成丁戊乙勾股形丁乙半弦為股丁戊離徑為勾戊乙半徑為弦另作辛卯形為丁戊勾上方形庚壬形為戊乙弦上方形夫庚壬之大于辛卯者為癸丑子磬折形癸丑子磬折形必等于乙丁股上方形何也弦上方形與勾股上兩方形並

等故也卷六一則若移子于寅則戌癸丑寅直形必以勾弦較為濶勾弦和為長今戊乙弦等于戊丙戊丙之大于丁戊勾者為丙丁是丙丁矢即勾弦較也故以矢除丁乙半弦弧矢形之弦自乘之積即得勾弦和又乙戊弦勾股形之弦既半徑必與戊已等戊已合丁戊非丁已餘徑而何○求得餘徑加矢即全徑減矢折半即離徑加矢折半即半徑

二十則

弧矢形以矢徑求弦

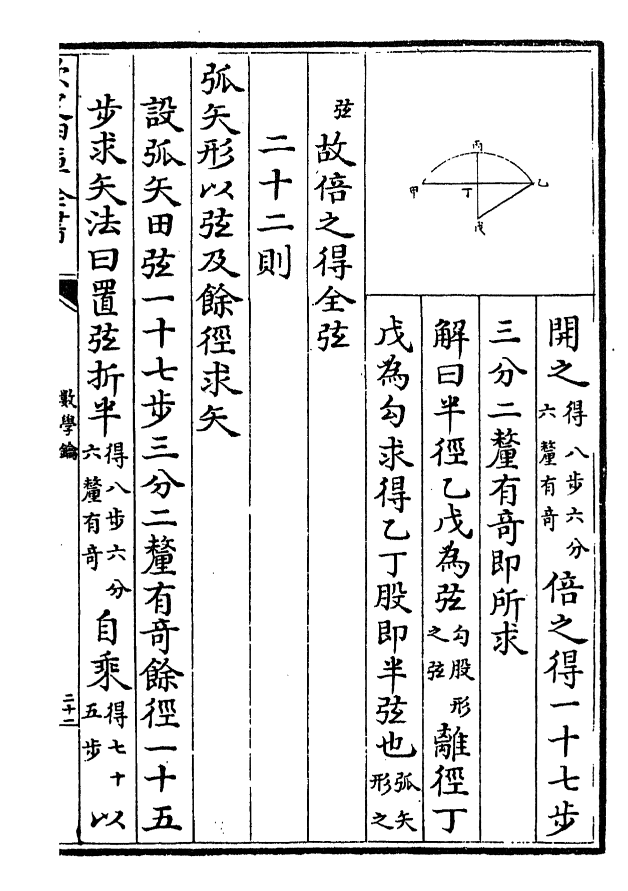
設弧矢田矢五步徑二十步求弦法曰以矢減徑餘一十五步以矢乘之得七十五步平方開之得八步六分六釐有奇倍之得一十七步三分二釐有奇即所求

解曰依前解矢與餘徑相乘之數即半弦自乘之數故平方開之得半弦倍之得全弦也

二十一則

弧矢形以離徑半徑求弦

設弧矢田半徑十步離徑五步求弦法曰置半徑離徑各自乘半徑得一百步離徑得二十五步兩數相減餘七十五步平方



開之得八步六分六釐有奇倍之得一十七步三分二釐有奇即所求

解曰半徑乙戊為弦勾股形之弦離徑丁戊為勾求得乙丁股即半弦也弧矢形之弦故倍之得全弦

二十二則

弧矢形以弦及餘徑求矢

設弧矢田弦一十七步三分二釐有奇餘徑一十五步求矢法曰置弦折半得八步六分六釐有奇自乘得七十五步以

餘徑除之得五步即所求

解曰依十九則解半弦自乘之數即矢偕餘徑相乘之數故以餘徑除之得矢

二十三則

弧矢形以弦及全徑求矢

設弧矢田弦一十七步三分二釐有奇全徑二十步求矢法曰置弦徑各自乘弦得三百步徑得四百步兩數相減餘一百步平方開之得十步以減全徑餘十步折半得五步即所求

解曰全徑上方形當矢偕餘徑矩內形四及矢與餘徑之較線上方形一（一卷十三則）全弦上方形當半弦上方形四又半弦上方形與矢偕餘徑矩內形等（本卷十九則）于全徑上方積內減去全弦上方積即減去矢偕餘徑矩內積四也則所餘必矢與餘徑之較線上方積平方開之即得矢與餘徑之較線故以之減徑折半得矢也

二十四則

弧矢形以半弦半徑求矢

設弧矢田半弦八步六分六釐有奇半徑十步求矢

法曰置半弦半徑各自乘（半弦得七十五步 半徑得一百步）兩數相減（餘二十五步）平方開之（得五步）以減半徑得五步即所求

解曰半弦丁乙為股戊乙半徑為弦求得丁戊勾即離徑也故以之減半徑得矢

二十五則

弧矢形以半弦及離徑求矢

設弧矢田半弦八步六分六釐有奇離徑五步求矢

法曰置半弦離徑各自乘（半弦得七十五步離徑得二十五步）兩數並得一百步平方開之（得十步）減去離徑得五步即所求

解曰半弦丁乙（圖同前則）為股離徑丁戊為勾求得乙戊弦即徑也故減去離徑得矢

二十六則

弧矢形以半徑半弦較及半弦離徑較求矢與弦

設弧矢田半徑多半弦一步三分四釐弱半弦多離徑三步六分六釐強求矢及弦法曰並兩數（共五步以

半徑多半弦之數乘之（得六步七分）倍之（得一十三步四分）平方開之（得三步六分六釐）以加半徑多半弦之數得五步即離徑再加半弦多離徑之數得八步六分六釐即半弦再加半徑多半弦之數得十步即半徑半徑減去離徑餘五步即矢

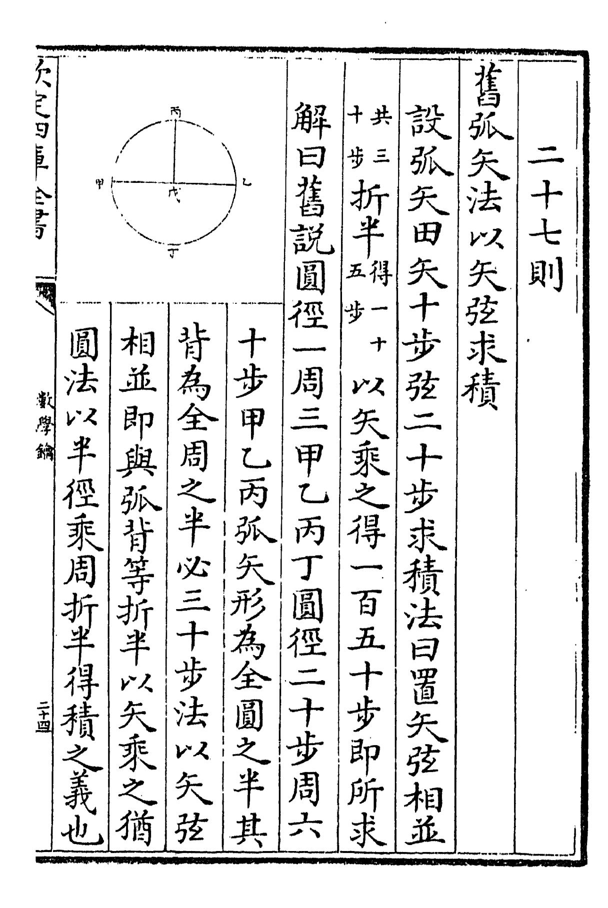
解曰戊乙半徑（圖同二十四則）多于丁乙半弦之數即股弦較丁乙半弦多于丁戊離徑之數即勾股較勾股較並股弦較即勾弦較此即勾弦較股弦較求勾股弦法也（六卷二十則）

二十七則

舊弧矢法以矢弦求積

設弧矢田矢十步弦二十步求積法曰置矢弦相並共三十步折半得一十五步以矢乘之得一百五十步即所求

解曰舊說圓徑一周三甲乙丙丁圓徑二十步周六



十步甲乙丙弧矢形為全圓之半其背為全周之半必三十步法以矢弦相並即與弧背等折半以矢乘之猶圓法以半徑乘周折半得積之義也

本卷三則以舊法論全圓得積三百步而半圓之弧得積一百五十步與圍三徑一之數脗合無差過此以往其矢漸短弧形漸細其差漸多甚至百步之積有差至二十餘步者即如十七則弧矢田弦一十七步三分二釐有奇矢五步依舊法求之止得積五十五步八分較前法所求之積則少五步六分六釐有奇前法雖密于舊法然必背矢弦皆具方可起算舊法有矢有弦即可得積故並存之

二十八則

舊弧矢法以積矢求弦

設弧矢田積五十五步八分矢五步求弦法曰置積倍之得一百一十一步六分以矢除之得二十二步三分二釐減去矢餘一十七步三分二釐即所求

解曰舊法以矢乘半弦半矢得弧矢積若以矢除弧矢積必仍得半弦半矢以矢除弧矢積既得半弦半矢以矢除弧矢之倍積不得一弦一矢乎一弦一矢內減去一矢所餘非弦而何

二十九則

舊弧矢法以積弦求矢

設弧矢田積五十五步八分弦一十七步三分二釐

求矢法曰置積八因之得四百四十六步四分另置弦自乘得二百九十九步九分八釐二毫四絲兩數並共七百四十六步三分八釐二毫四絲平方開之得二十七步三分二釐減去弦餘十步折半得五步即所求

丙　庚　丁
丑　辛　子
壬　巳　癸
甲　戊　乙

解曰甲丁方形邊與一弦二矢等甲戊乙巳丁庚丙辛各與矢等其戊巳

等四直形即矢偕一弦一矢矩內形壬子即弦上方形也又弧矢形以矢乘半弦半矢得積本卷二十七則而當一直形之半則四直形必當八弧矢積矣是一弦二矢上方形與弦上方積一及弧矢積八並等反之則弦上方積一及弧矢積八並為一方其邊必一弦二矢也法並兩數以平方開之所得即一弦二矢之度故減弦折半得矢也○舊弧矢法弦背積及徑輾轉相求共三百二十六法實亦不出十七則以下十法之外其不能該者止以上三法耳故存之

三十則

增弧矢法以矢弦求積

設甲乙丙弧矢田丙丁矢五步甲乙弦一十七步三分二釐有奇求積法曰有矢與弦可得丁壬餘徑餘徑加矢可得丙壬全徑本卷十九則甲巳與丙壬等即以

甲巳為弦甲乙為股求乙巳勾得十步六卷三則為乙巳庚餘弧之弦又將乙巳折半得巳辛復為勾戊巳半徑為弦求戊辛股以減半徑戊庚與戊巳等餘庚

辛一步三分四釐為乙巳庚餘弧之矢另求甲巳徑上半圓積得一百五十七步一分四釐二毫八絲〇本卷三則次求甲乙巳勾股積得八十六步六分〇一卷四則與半圓積相減餘七十步零五分四釐二毫八絲為甲乙丙與乙巳庚兩弧之共積置為實兩弧各以三弦一矢相並以矢乘之甲乙丙弧得二百八十四步八分乙巳庚弧得四十一步九分九釐五毫六絲以甲乙丙弧數乘實得二萬零九十步零五分八釐九毫四絲四忽並兩弧數共三百二十六步七分九釐五毫六絲除之得六十一步四分七釐七毫五絲有奇即所求

解曰此借兩弧三弦一矢以矢乘之之數為比例以

分共積也此法較舊法為密然大弧既盈則小弧必朒較十七則未免有千一之差如必欲得弧積眞數密量弧背從十七則可也

三十一則

圓截圓

二十一步
三五

設圓田徑二十一步依外周截積三百三十六步八分七釐五毫求餘圓徑法曰置徑自乘得四百四十一步另置截積以十四乘之得四千七百一十六步二分五釐十

一除之得四百二十八步七分五釐兩數相減餘一十二步二分五釐平方開之得三步五分即所求

解曰此與方環截積同一卷五十六則

三十二則

圓截弧矢舊法

設圓田徑一十三步截弧矢積三十二步求矢法曰置截積自乘得一千零二十四步為實用商法商矢四步即以所商之矢乘截積得一百二十八步為上廉另以

矢每步加負隅二分五釐得五步與徑相減餘八步為餘徑又以所商之矢自乘得一十六步以乘餘徑得一百二十八步為下廉并兩廉共二百五十六步為法除實得四步即所求

解曰弧矢之積元以矢乘半弦半矢而得本卷二十七則若以半弦半矢相并除積必得矢法置截積自乘是倍截積為三十二若以三十二半弦與三十二半矢并除倍積必亦得矢法以矢乘截積得三十二全矢是多三十二半矢少三十二半弦若以半弦大于半矢

之數三十二倍之與三十二全矢並即與三十二半弦三十二半矢相並之數同今無半弦數須以矢乘餘徑以為半弦自乘之方（本卷十九則）如甲乙方形甲巳為半弦甲丁為半矢丁巳為半矢弦較（即半弦大于半矢之度）則丁巳乙戊直形必半矢弦較以半弦為倍數者也庚辛等于丁巳庚丙等于甲丁則庚丙戊辛直形必半矢弦較以半矢為倍數者也兩直形並再以矢乘之必半矢弦較以截積三十二為倍數者

也何也弧矢之積元以矢乘半弦半矢而得故也甲乙大方形減去丁巳乙戊與庚丙戊辛兩直形餘甲丙小方形為甲丁半矢之冪法所謂負隅也負隅既為半矢之冪必為全矢冪四分之一故法以二分五釐為負隅也法用矢自乘以乘餘徑與用矢乘餘徑再以矢乘之得數同也○按元注云所得之矢過于所商之矢為約矢太短不及所商之矢為約矢太長宜更商之商約之法既無一定惟以意斟酌之若整齊之矢或一二商可得苟遇畸零之矢必至千百商

不能得者古人于此條實無善法姑以此考驗所商之合否耳若止欲考驗所商之合否又何如以所商之矢求半弦本卷二十則再加半矢以矢乘之本卷二十七則合積為準過積為約矢太長不及積為約矢太短不較捷乎

三十三則

弧矢截雜線三角形

設半圓弧矢田弦二十步自心截雜線三角形背長一十步零四分七釐六毫一絲六忽求截積法曰置

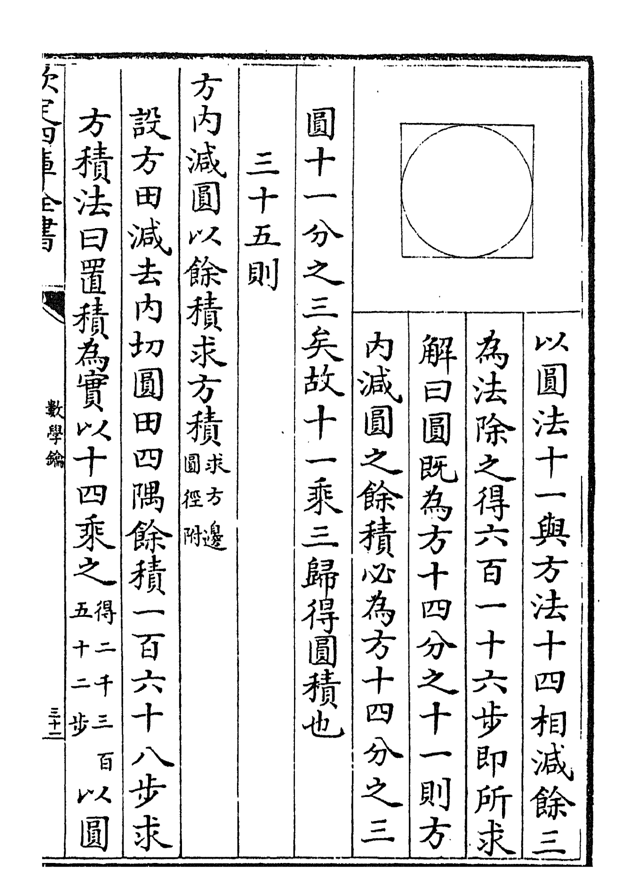
截背以弦折半得十步乘之得一百零四步七分六釐一毫六絲折半得五十二步三分八釐零八絲即所求

解曰雜線三角形為圓之分形故求積之法同圓本卷三則

三十四則

方內減圓以餘積求圓積

設方田減去內切圓田四隅餘積一百六十八步求圓積法曰置積為實以圓法十一乘之得一千八百四十八步



以圓法十一與方法十四相減餘三為法除之得六百一十六步即所求

解曰圓既為方十四分之十一則方內減圓之餘積必為方十四分之三圓十一分之三矣故十一乘三歸得圓積也

三十五則

方內減圓以餘積求方積求方邊圓徑附

設方田減去內切圓田四隅餘積一百六十八步求方積法曰置積為實以十四乘之得二千三百五十二步以圓

法十一與方法十四相減餘三為法歸之得七百八十四步即所求

解同前○置方積平方開之即方邊亦即圓徑

三十六則

圓内減方以餘積求方積（求方邊圓徑附）

設圓田減去内切方田餘積二百二十四步求方積法曰置積為實以七乘之（得一千五百六十八步）以七與圓法十一相減餘四為法歸之得三百九十二

步即所求

解曰内切方形之弦與外切方形之邊等則内切方形必倍小于外切方形而若七之與十四夫圓既為外方十四分之十一而内方不為圓十一分之七乎圓内減方之餘積為圓十一分之四即為内方七分之四故七乘四除得内切方積也○置方積平方開之即得方邊倍方積平方開之即得圓徑

三十七則

圓内減方以餘積求圓積

設圓田減去内切方田餘積二百二十四步求圓積

法曰置積為實以圓法十一乘之得二千四百六十四步以圓法十一與七相減餘四為法歸之得六百一十六步即所求

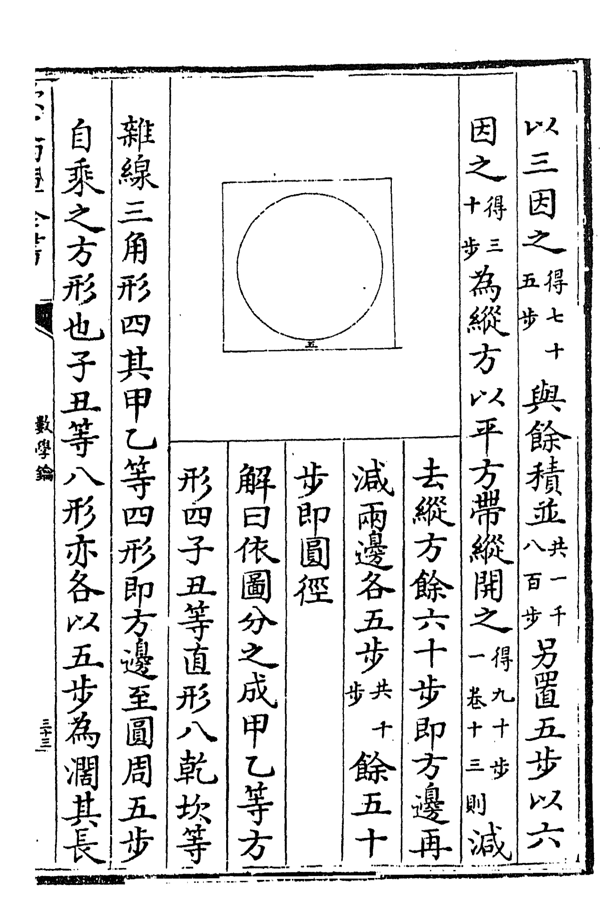
解同前

三十八則

方内減不相切之圓以餘積求方邊及圓徑

設方田内減圓田方邊至圓周五步餘積一千七百二十五步求方邊及圓徑法曰置五步自乘得二十五步

以三因之得七十五步與餘積並共一千八百步另置五步以六因之得三十步為縱方以平方帶縱開之得九十步一卷十三則減



去縱方餘六十步即方邊再減兩邊各五步共十步餘五十步即圓徑

解曰依圖分之成甲乙等方形四子丑等直形八乾坎等雜線三角形四其甲乙等四形即方邊至圓周五步自乘之方形也子丑等八形亦各以五步為濶其長

則圓之半徑也乾坎等四形為方減内切圓形之餘積以方四圓三推之舊法謂方内容圓圓居方四分之三四形並必當方四分之一乾坎艮三形並必足以補癸形之闕而與一小方二直形一雜形並共湊成一坤震方形矣次移甲于丁移乙于戊移丙于己移子于午移丑于未移寅于申移卯于

西移辰于戌移巳于亥尚闕庚辛壬三形故法取方邊至圓周之五步自乘以三因之加入積内也自壬至丁凡六形每形濶五步共計三十步故法取方邊至圓周之五步以六因之為縱方也帶縱開方法置積四因之縱方自乘兩數並平方開之得長濶相和之度即兊巽與巽震並減去縱方即兊坤餘兩濶即坤巽與巽震並即方邊方邊之大于圓徑者為兩邊之各五步故減之得圓徑本則及下則皆用周三徑一法

三十九則

圓内減不相切之方以餘積求圓徑及方弦

設圓田内減方田圓周至方角一步餘積四十三步

求圓徑及方弦法曰置一步自乘仍得一步以二因之得二步與餘積並並四十五步另置一步以四因之得四步為縱方以平方帶縱開之得一十四步減去縱方即圓徑再減圓周至方角各一步共二步餘八步即方弦

解曰依内方角作一圓線此圓線偕外圓周必成一圓環形次依環濶改作方環圓環當方環四分之三故止作方環之三隅即與圓環等依圖分之成甲乙丙三方形丁戊已庚辛壬六直形尚餘癸子丑寅四弧矢形為圓減内切方形之餘積以圓三方二推之舊法謂圓内容方方居圓三分之二四弧矢形並當圓三分之

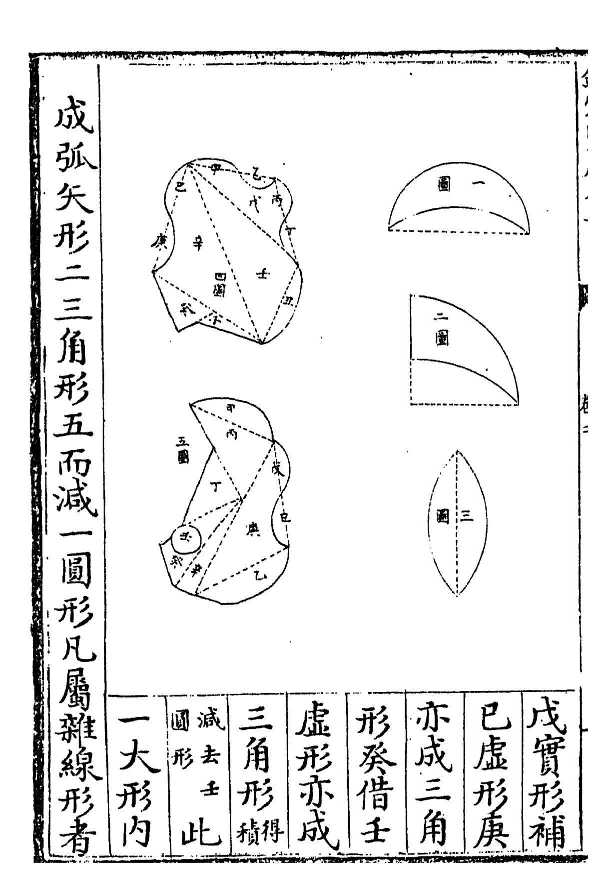
一必當内方二分之一而夘癸辰方形亦當内方二分之一則四弧矢形必能補夘癸辰方形之闕而與辛壬丙三形並共輳成一震坎方形矣次移甲于巳移乙于午移丁于酉移戊于戌移巳于亥移庚于乾尚闕未申二形故法取圓周至方角一步自乘二因之補入積内也自巳至申凡四形每形濶一步共四步故取圓周至方角之一步四因之為縱方也以平方帶縱開之得巽艮艮坎長濶相和之度減去縱方巽震餘震艮艮坎兩濶即圓徑圓徑之大于方弦者

為兩邊之各一步故減之得方弦

四十則

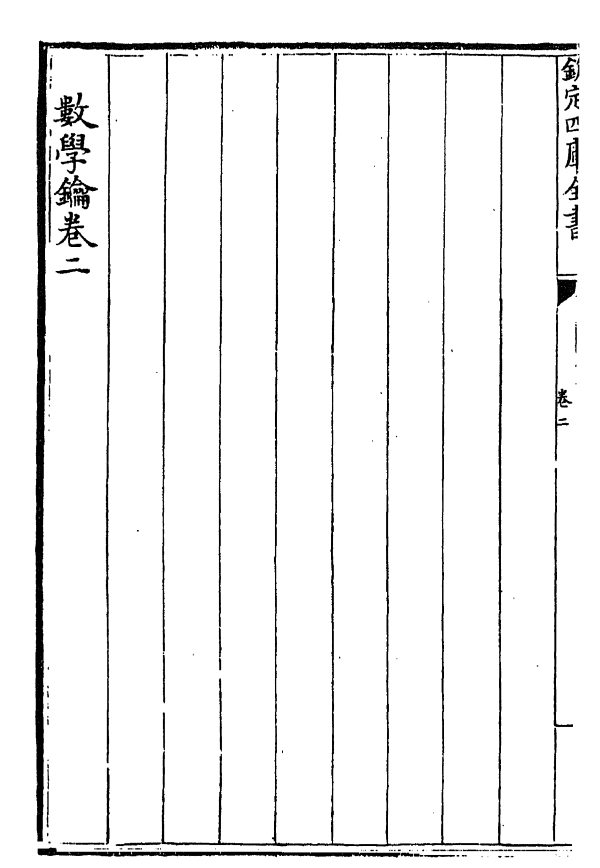
諸雜線形求積

第一圖可作一弧矢形而減一弧矢形第二圖可作半弧矢形而減半弧矢形第三圖可作兩弧矢形第四圖移甲丙實形補乙丁虛形成戊三角形又移巳實形補庚虛形成辛三角形壬癸子各成三角形丑自成弧矢形此一大形內成三角形五弧矢形一第五圖甲乙各自成弧矢形丙丁辛各自成三角形移



戊實形補已虛形庚亦成三角形癸借壬虛形亦成三角形得積減去壬圓形此一大形內成弧矢形二三角形五而減一圓形凡屬雜線形者

皆依五形倒裁之



數學鑰卷二